Classes isolées des difféomorphismes C^1-génériques

C. Bonatti

July 6, 2009

Contents

1 Introduction: structuration de la dynamique à l'aide de pièce indécomposables.

Décrire la dynamique d'un difféomorphisme $f\colon M \to M$, c'est dire où vont les orbites, ou en termes plus compliqués: décrire le comportement asymtotique des orbites

$$O(x, f) = \{f^n(x), x \in \mathbb{Z}\},$$

quand $n \to +\infty$ et $n \to -\infty$.

Ce n'est pas une question vraiment précise, et on ne peut pas dire quand le système est vraiment *bien décrit*. Par contre on a des exemples (classiques) où la description est satisfaitante, et qui servent de modèle.

1.1 Difféomorphismes Morse Smale

Pour les systèmes les plus simples (dit *Morse-Smale*), la dynamique ressemble à celle du temps 1 du gradient d'une fonction de Morse.

Il y a un nombre fini d'orbite periodiques hyperboliques. Toute orbite converge positivement, et négativement, vers une orbite periodique. Pour un ouvert dense de points, leur ensemble ω-limite est une orbite attractante, leur ensemble α-limite est une orbite repulsive.

Les bassins d'attraction des orbites attractantes sont bordés par les variété stables des selles,(ainsi que par les points répulseurs). La description de la dynamique globale consiste à décrire la position des variétés invariantes des orbites périodiques.

D'un point de vue purement dynamique qualitative, les difféomorphismes Morse-Smale sont "bien compris". Il reste cependant beaucoup d'aspects qui sont des sujets de recherche:

- classification topologique (à conjugaison près); elle n'est comprise qu'en dimension 2, aussi bien pour les champs de vecteurs que pour les difféomorphisme;
- classes d'isotopies de champs de vecteurs non singuliers contenant des Morse Smale
- A quelle condition un Morse-Smale admet une fonction de Lyapunov differentiable, non dégénérée ? (J'ai vu un récent travail de Grines et Laudenbach sur ce sujet).

1.2 Dynamiques hyperboliques: petit mémento

Les dynamiques que l'on considèrent bien comprises sont celles qui sont hyperboliques, plus précisément celles qui vérifient *l' Axiome A* et la condition *sans cycles*.

Je rappelle brièvement les définitions, notions et propriétés basiques:

1.2.1 Hyperbolicité

Soit $f\colon M \to M$ un difféomorphisme, et K un ensemble compact invariant par f. On dit que K est hyperbolique s' il existe une décomposition $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$, $x \in M$, telle que

- la décomposition est invariant par Df
- il existe $N > 0$ tel que pour tout x et tout $v^s \in E^s(x)$, $v^u \in E^u(x)$ on ait

$$\|D_x f^N(v^s)\| \leq \frac{1}{2}\|v^s\| \quad \text{et} \quad \|D_x f^N(v^u)\| \geq 2\|v^u\|$$

Cette décomposition est toujours continue sur K (en particulier la dimension est localement constante), unique.

L'hyperbolicité a trois conséquences principales: la persistance des ensembles hyperboliques par perturbation de la dynamique, l'existence de variétés stables et instables, et le pistage des pseudo-orbites par de vraies orbites.

1.2.2 Stabilité structurelle des ensembles hyperboliques

Tout ensemble hyperbolique K persiste par perturbations de f: Il existe un C^1-voisinage $\mathcal{U}_f$ de f et une application

$$g \in \mathcal{U}_f \mapsto (h_g \colon K \to M)$$

(continue pour la C^1-topologie pour g et la C^0-topologie pour h_g), telle que pour tout $g \in \mathcal{U}_f$ $K_g = h_g(K)$ est un ensemble hyperbolique invariant et h_g est une conjugaison de $f|_K$ à $g|_{K_g}$.

On dit que K_g est la *continuation* de K.

1.2.3 Variétés invariantes des ensembles hyperboliques

Pour tout $x \in K$ et $\varepsilon > 0$, on appelle *variété stable locale de x de taille ε* l'ensemble $W^s_\varepsilon(x)$ des points z tels que $d(f^n(x), f^n(z)) \leq \varepsilon$ pour tout $n > 0$. La *variété stable* de x est l'ensemble $W^s(x)$ des points z tels que

$$\lim_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(z))) = 0.$$

Si K est hyperbolique, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, sa variété stable locale $W^s_\varepsilon(x)$ est un disque plongé dans M de dimension $dim(E^s(x)$, centré en x, variant continûment avec x et tangent en x à $E^s(x)$. De plus,

$$W^s_\varepsilon(x) \subset W^s(x) = \bigcup_n f^{-n}(W^s_\varepsilon(f^n(x))).$$

1.2.4 Lemme de pistage (= Shadowing lemma) et ensembles basiques

Une ε-pseudo orbite est une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ telle que, pour tout i on a:

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon.$$

Théorème 1.1 (Lemme de Pistage). *Si K est hyperbolique, alors pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout ε-pseudo orbite $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}, x_i \in K$ est δ-pistée par une vraie orbite $\{f^i(x)\}$, $x \in V_\delta(K)$.*

De plus il existe $\delta_0 > 0$ tels que le pistage est unique.

Remarquons que, dans l'énoncé ci dessus, l'orbite qui piste n'est pas forcément dan K. Cette difficulté est évitée si K est *l'ensemble maximal invariant* d'un de ses voisinages: il existe U voisinage de K tel que

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U).$$

On dit que K est *isolé* et U est *un voisinage isolant* de K.

On appelle *ensemble basique hyperbolique* les ensembles hyperboliques isolés. Voici trois conséquences importantes du lemme de pistage pour les ensembles basiques:

- *Orbites périodiques:* un ensemble basique hyperbolique est l'adhérence des points périodiques qu'il contient.

  Remarque 1.1. *Ce n'est clairement pas le cas de tout ensemble hyperbolique! Il suffit pour cela de considérer des sous-ensembles du fer à cheval, sans orbites périodiques.*

- *Stabilité structurelle locale:* Si K est un ensemble basique, et si U est un voisinage de K relativement compact dans un voisinage isolant de K, alors pour g proche de f, la continuation K_g de K pour g est ensemble basique de g (conjugué à K); de plus, U est un voisinage isolant de K_g.

- *Variété stables et instables* Les points qui tendend vers K s'approchent d'une orbite contenue dans K: Si z est un point tel que $\omega(z) \subset K$, alors il existe $x \in K$ tel que $z \in W^s(x)$. Autrement dit, la variété stable de K est l'union des variétés stables de ses points.

1.2.5 Axiome A

Un difféomorphisme f vérifie l'Axiome A si

- son ensemble de points non errant $\Omega(f)$ est hyperbolique
- $\Omega(f)$ est l'adhérence de l'ensemble $Per(f)$ des points périodiques.

Il semble naturel de se demander si la seconde hypothèse est vraiment nécessaire: en effet les points non-errant sont portés par des pseudo-orbites fermées, et le shadowing lemma permet de pister les pseudo-orbites fermées par des vraies orbites periodiques. Cependant, ces pseudo-orbites fermées pourraient ne pas être contenues dans l'ensemble non-errant... De fait, cette seconde hypothèse n' est pas impliquée par l'hyperbolicité de $\Omega(f)$: dans [Ku], Masahiro Kurata a construit des difféomorphismes tel que:

- l'ensemble non-errant $\Omega(f)$ est hyperbolique,
- mais
$$\Omega(f) \neq \overline{Per(f)}.$$

1.2.6 Le théorème de décomposition spectrale de Smale.

Théorème 1.2 (Théorème de décomposition spectrale)**.** [1] *Si f vérifie l'Axiome A, alors $\Omega(f)$ admet une unique partition finie $\Omega(f) = \Lambda_1(f) \cup \cdots \cup \Lambda_k(f)$ en ensemble basiques hyperboliques $\Lambda_i(f)$ transitifs.*

Les Λ_i sont les pièces basiques de f.

1.2.7 La condition *sans cycles*

Si f vérifie l'Axiome A dont les pièces basiques sont $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$, un cycle est une suite $i_1, \ldots, i_j$ telle que pour tout $s \in \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$ il existe un point

$$z_s \in W^u(\Lambda_{i_s}) \cap W^s(\Lambda_{i_{s+1}}).$$

Pour un difféomorphisme Axiome A, la condition *sans cycle* est comme son nom l'indique.

[1] Je n'ai jamais compris pourquoi ce résultat a un tel nom. Les pièces basiques peuvent elles être vues comme vecteur propre d'un opérateur?

1.2.8 Axiome A sans cycles: caractérisation l'aide des points récurrents par chaînes

Un point est *récurrent par chaînes* s'il existe une pseudo orbite x_i commençant en x et terminant en x. L'ensemble $\mathcal{R}(f)$ des points récurrents par chaînes est un compact invariant contenant l'ensemble non-errant:

$$\Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$$

Théorème 1.3. *f vérifie l'axiome A sans cycle si et seulement si $\mathcal{R}(f)$ est hyperbolique.*

1.2.9 Filtration

Une *région attractante de f* est un ensemble U tel que l'image $f(\overline{U})$ de l'adhérence de U est contenue dans l'intérieur de U. Remarquons que le complémentaire d'une région attractante pour f est une région attractante pour f^{-1} (qu'on appelle aussi *région répulsive*). Un *ensemble filtrant* est l'intersection d'une région attractante et d'une région répulsive. Une orbite ne peut sortir d'une région attractante, et ne peut entrer dans une région repulsive. Ceci fait qu'une orbite qui sort d'une région filtrante ne peut plus y rentrer: l'intersection de toute orbite avec un ensemble filtrant correspond à un intervalle de temps.

De plus ces notions sont C^0*-robuste*: une region attractante pour f l'est pour tout homéomorphisme C^0-proche de f. De même pour les régions repulisive, et donc également pour les regions filtrantes.

Une *filtration de M* est une famille $\{U_i\}$ de régions attractantes, totalement ordonnées pour l'inclusion, et contenant M et $\emptyset$. Les ensembles $U_i \setminus Int(U_j)$ pour $U_j \subset IntU_i$ sont des ensembles filtrants.

Théorème 1.4. *Si f vérifie l'Axiome A sans cycles, alors il existe une filtration $\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \dots M_k = M$ telle que, pour tout i, l'ensemble maximal invariant dans l' ensemble filtrant $M_i \setminus Int(M_{i-1})$ est une pièce basique (notée Λ_i) de la décomposition spectrale de Smale.*

Remarque 1.2. *Dans le théorème ci-dessus, la variété instable de Λ_i est incluse dans M_i, la variété stable de Λ_i est contenue dans le complémentaire de M_{i-1}. En particulier,*

$$W^s(\Lambda_i) \cap W^u(\Lambda_j) \neq \emptyset \Longrightarrow i \leq j.$$

Il existe une telle fitration, pour tout ordre total sur l'ensemble des pièces basiques qui soit compatible avec l'ordre de Smale (une pièce basique K est inférieure à une pièce L si $W^s(K) \cap W^u(L) \neq \emptyset$).

‘

1.2.10 Attracteurs

Les pièces basiques qui sont minimales pour l'ordre de Smale sont les ensembles maximaux invariants de régions attractantes. Ce sont les *attracteurs* de f.

On montre que

Théorème 1.5. *Un ensemble basique hyperbolique K est un attracteur si et seulement s'il contient sa variété instable: $K = W^u(K)$*

1.2.11 Axiome A sans cycles et Ω-stabilité

En conséquence de tout ce que l'on a vu ci-dessus on montre facilement que,

Théorème 1.6. *si f vérifie l'Axiome A sans cycle, alors il existe un C^1-voisinage $\mathcal{U}_f$ de f tel que, pour tout $g \in \mathcal{U}_f$ l'ensemble $\mathcal{R}(g) = \Omega(g)$ est hyperbolique et $g|_{\mathcal{R}(g)}$ est conjugé à $f|_{\mathcal{R}(f)}$.*

On dit que f est Ω-*stable*.

La réciproque (beaucoup plus difficile) a été prouvé par J. Palis.

1.2.12 Axiome A sans cycles: Description de la dynamique globale

Soit f un difféomorphisme vérifiant l'Axiome A sans cycle. Alors tout $x \in M$ appartient à la variété stable d'un point d'une pièce basique Λ_i et à la variété instable d'un point d'une pièce basique Λ_j. De plus $i = j$ si et seulement si $x \in \Lambda_i$.

Il existe un ensemble résiduel G dans M tel que si $x \in G$ (si x est un point générique) alors $\omega(x) = \Lambda_i$ et $\alpha(x) = \Lambda_j$. De plus Λ_i est un attracteur topologique et Λ_j est un répulseur topologique.

En un certain sens, la dynamique ressemble à celle des Morse-Smale en remplaçant les orbites periodiques par les pièces basiques.

De plus l'existence de partitions de Markov montre que la dynamique dans chaque pièce basiques Λ est *semi-conjuguée* à un sous-shift de type fini; plus exactement, il existe un sous-shift de type fini $\sigma_A \colon \Sigma_A \to \Sigma_A$, associé à une matrice d'incidence A et une projection $\Sigma_A \to \Lambda$ qui est une semi-conjugaison entre σ_A et $f|_\Lambda$.

Pourtant on est loin d'avoir une description complete de la dynamique:

- les point génériques (dans le bassin d'un attracteur non trivial) n'on pas de statistique: les moyennes temporelles le long des orbites oscillent indefiniment.

- il est illusoire d'esperer determiner l'ensemble ω-limite d'un point donné, car deux points arbitrairement proches peuvent avoir des ensembles limites très différents.

- La topologie des pièces basiques n'est pas comprise, (pas même celle des attracteurs en dimension 3!):

  Question 1. *Y a-t-il des attracteurs hyperbolique en dimension 3 qui sont des laminations de dimension 1, transversalement homéomorphes à des tapis de Sierpinsky?*

1.2.13 La condition de transversalité forte et la stabilité structurelle globale

Si f est un difféomorphisme Axiom A de M, alors tout point x de M appartient à l'intersection $W^s(y) \cap W^u(z)$ de variété stables et instables de points de $\Omega(f)$.

On dit que f vérifie la condition de transversalité forte si toute ces intersections sont transverse.

Robbin et Robinson ont montré que Axiome A la transversalité forte impliquait la stabilité structurelle globale. Mañé [Ma_2] a prouvé que réciproquement, Axiome + la transversalité forte étaient nécessaire à cette stablitié. On obtient donc

Théorème 1.7. *f est C^1-structurellement stable $\Longleftrightarrow$ f vérifie l'Axiome A et la transversalité forte.*

1.3 Théorie de Conley

1.3.1 classes de récurrence par chaînes

Dans cette section, f est un homéomorphisme d'un espace métrique compacte (X, d).

Je rappelle que, pour tout $\varepsilon > 0$, une ε-pseudo orbite est une suite (x_i) telle que

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon.$$

Un point x est récurrent par chaînes s'il existe une ε-pseudo orbite $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = x$ avec $k > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$.

L'ensemble $\mathcal{R}(f)$ des points récurrents par chaînes est un compact invariant qui contient l'ensemble non-errant. Il est en général plus gros que l'ensemble non-errant: par exemple, si f est un difféomorphisme Axiome A avec cycles, alors $\mathcal{R}(f)$ contient tous les points des cycles.

Il y a une relation d'équivalence naturelle sur $\mathcal{R}(f)$. On dit que $x, y \in \mathcal{R}(f)$ sont équivalent par chaînes si on peut aller de x à y et de y à x par des pseudo-orbites de sauts arbitrairement petits. Les classes déquivalence de cette relation sont les *classes de récurrence par chaînes*. Chaque classe $C(x)$ est un compact invariant par f.

1.3.2 Filtrations et voisinage filtrant des classes de r écurrence par chaînes

Pour tout point $x \in X$, on note $W^u_\varepsilon(x)$ l'ensemble des points y atteignables depuis x par une ε-pseudo orbite non triviale:

$$W^u_\varepsilon(x) = \{y | \exists x_0 = x, \ldots x_k = y, k > 0 \text{ and } d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon, \forall i \in \{0, \ldots k-1\}\}.$$

Alors $W^u_\varepsilon(x)$ est un ouvert et est une region attractante: $f(\overline{W^u_\varepsilon(x)}) \subset W^u_\varepsilon(x)$.

D'autre part, pour toute région attractante, il existe $\varepsilon > 0$ tel que les pseudo-orbites partant d'un point de la region restent dans la region. En particulier, une classe de récurrence par chaînes rencontrant une région attractante est incluse dans cette region.

En poussant un peu cette idée, Conley[Co] montre

Théorème 1.8 (Théorème fondamental de la dynamique)**.** *Il existe une application continue* $\varphi \colon X \to M$ *telle que*

- *pour tout* x*,* $\varphi(f(x)) \leq \varphi(x)$*.*
- $\varphi(f(x)) = \varphi(x) \Longleftrightarrow x \in \mathcal{R}(f)$
- *for all* $x, y \in \mathcal{R}(f)$*,* $\varphi(x) = \varphi(y) \Longleftrightarrow x$ *est équivalent à* y*.*
- $\varphi(\mathcal{R}(f))$ *est d'intérieur vide.*

Les niveaux de φ ne contenant pas de points récurrents permettent donc de construire des filtrations séparant deux à deux les classses de récurrence par chaînes.

Corollaire 1.3. *Toute classe de récurrence par chaînes admet une base de voisinage filtrant.*

On en déduite deux résultat de semi continuité:

Corollaire 1.4.
- *L'application* $f \mapsto \mathcal{R}(f)$ *est semi-continue supérieurement.*
- *Soit* C *une classe de récurrence par chaînes de* f *et* U *un voisinage filtrant de* C *pour* f*. Alors ile existe un* C^0*-voisinage* $\mathcal{U}_f$ *de* f *tel que pour tout* $g \in \mathcal{U}_f$ *toute classe rencontrant* U *est contenue dans* U*. On a donc également une dépendance semin continue supéireur des classs de récurrence par chaînes.*

1.3.3 Description de la dynamique globale

Toute orbite descend (pour une fonction de Lyapunov) du niveau correspondant à une classe, vers le niveau d'une autre classe plus basse. Cette description fait penser à la dynamique du gradient d'une fonction de Morse. Cependant, le théorè de Conley est très général et ne peux pas donner une descrition très précise :

- quand une orbit converge vers une classe (ou une partie d'une classe), elle ne suit pas forcément une orbite de cette classe.
- la dynamique dans les classes n'est pas du tout comprise.

2 Robustesse de l'isolement

2.1 Classes isolées et robustement isolées

L'une des difficultés de l'utilisation de la théorie de Conley pour structurer la dynamique globale est qu'il peut y avoir une infinité (même non dénombrable) de classes de récurrence par chaînes.

Soit f un difféomorphisme d'une variété compacte, et soit C une classe de récurrence par chaînes de f. On dit que C est *isolée* s'il existe un voisinage U de C tel que $\mathcal{R}(f) \cap U = C$.

On dit que C est C^1*-robustement isolée* s'il existe un C^1-voisinage $\mathcal{U}$ de f et un voisinage U de C tel que, pour tout $g \in \mathcal{U}$ l'intersection $U \cap \mathcal{R}(g)$ consiste en exactement une classe de récurrence par chaînes de g.

Le but de cette partie est de montrer:

Théorème 2.1. *Il existe un sous-ensemble résiduel $\mathcal{G}$ de $Diff^1(M)$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{G}$ et toute classe C de f on a:*
C est isolée $\Longleftrightarrow$ C est robustement isolée.

La preuve du théorème se divise en deux parties: l'une que l'on appellerait "'argument standard de généricité"', et l'autre est un lemme de perturbation. Voici d'abord

2.2 Un argument standard de généricité:

Démonstration : On considère une base dénombrable $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de la topologie de M: tout ouvert de M est union des $\mathcal{O}_i$ qu'il contient. On considère la famille dénombrable

$$\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{i_1} \text{ avec } i_1 \dots i_k \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$$

des unions finies de $\mathcal{O}_i$. Pour tout ouvert de M et tout compact contenu dans l'ouvert, il existe un ouvert appartenant à $\mathcal{O}$ contenant le compact et contenu dans l'ouvert.

À tout ouvert O de M on associe l'ensemble $\mathcal{F}_O \subset Diff^1(M)$ des difféomorphismes pour lequel O est un ouvert filtrant de f. Remarquons que $\mathcal{F}_O$ est ouvert: en effet un ouvert filtrant est l'intersection d'une region attractante de f et d'une région attractante de f^{-1}. Être une région attractante est une propriété ouverte : l'image de l'adhérence est incluse dans l'intérieur, donc à distance strictement positive du complémentaire.

On note $\widetilde{\mathcal{F}_O}$ l'intérieur du complémentaire de $\mathcal{F}_O$. Ainsi $\widetilde{\mathcal{F}_O} \cup \mathcal{F}_O$ est un ouvert dense de $Diff^1(M)$.

Pour tout $\in \mathcal{F}_O$, O est un voisinage filtrant. Donc toute classe de f rencontrant O est incluse dans O. Considérons l'ouvert $\mathcal{RI}_O \subset \mathcal{F}_O$ qui est l'intérieur de l'ensemble des difféomorphismes tels que O contient au plus une classe de récurrence par chaînes.

Notons $\mathcal{N}_O$ l'intérieur de l'ensemble des difféomorphismes tels que O contient au moins deux classes de récurrences par chaînes.

Nous allons montrer

Lemme 2.1. *Pour tout ouvert O, $\mathcal{RI}_O \cup \mathcal{N}_O$ est dense dans $\mathcal{F}_O$.*

Terminons la preuve en supposant prouvé le lemme. On note $\mathcal{U}_O = \widetilde{\mathcal{F}_O} \cup \mathcal{RI}_O \cup \mathcal{N}_O$. C'est donc un ouvert dense dans $Diff^1(M)$. On note $\mathcal{G} = \bigcap_{O \in \mathcal{O}} \mathcal{U}_O$. C'est une partie résiduelle de $Diff^1(M)$. Soit $f \in \mathcal{G}$ et C une classe de récurrence par chaînes de f. Supposons que C soit isolée. Elle admet un voisinage filtrant dans lequel elle est la seule classe de récurrence par chaînes. On peut alors trouver un plus petit voisinage filtrant de C qui appartienne $\mathcal{O}$. Donc $f \in \mathcal{F}_O$, car O est filtrant pour f. Mais $f \in \mathcal{G}$ donc:

- ou bien $f \in \mathcal{N}_O$, ce qui contredit le fait que O ne contient qu'une seule classe,
- ou bien $f \in \mathcal{RI}_O$.

Donc $f \in \mathcal{RI}_O$ c'est à dire que C est robustement isolée: O ne contient qu'au plus une classe de récurrence pour tout g proche de f. □

2.3 Un lemme de perturbation

Il reste à prouver le lemme. Pour cela nous allons utiliser deux lemmes de perturbations ultra-classiques: le closing lemma de Pugh ([Pu, PR]) et le fait que tout orbite périodique peut être rendue hyperbolique par une petite perturbation.

Démonstration : Soit f un difféomorphisme et O un ouvert filtrant de f. Si $\mathcal{R}(f) \cap O = \emptyset$ ceci reste vrai pour g proche de f: en effet le bord de O est inclus dans l'union des bord des regions attractante de f et f^{-1}, qui sont disjoint de $\mathcal{R}(f)$. Donc l'adhérence de O est disjointe de $\mathcal{R}(f)$. La semi-continuite de $\mathcal{R}(f)$ permet de conclure. Alors $f \in \mathcal{RI}_O$, et il n'y a rien a faire.

Supposons désormais que $\mathcal{R}(f)$ rencontre O. Alors il existe une orbite entièrement contenue dans un compact contenu dans O, donc il existe également une orbite récurrente contenue dans un compact contenu dans O. Le closing lemma et le lemme d'hyperbolisation des orbites périodiques assure donc l'existence de f_n arbitrairement proches de f (donc O est filtrant pour f_n), et possèdant une orbite périodique hyperbolique dans O. Si, pour n assez grand f_n appartient à $\mathcal{RI}_O \cup \mathcal{N}_O$, on a gagné.

On suppose donc que f a une orbite périodique hyperbolique x dans O mais n'appartient pas a $\mathcal{RI}_O$. C'est à dire qu'il existe g convergeant vers f tel que $\mathcal{R}(g) \cap O$ n'est pas la classe $C(x_g)$. Soit $y \in \mathcal{R}(g) \cap O$ tel que y n'appartient pas à la classe de x. On peut supposer y récurrent.

Soit U une région attractante de g (ou de g^{-1}) contenant x et pas y. Une perturbation h (arbitrairement petite) de l'orbite de y rend l'orbite de y périodique et hyperbolique, contenue dans O et cette orbite est séparée de l'orbite de x par une filtration. Le difféomorphisme h appartient alors à $\mathcal{N}_0$, ce qui conclut. □

2.4 Classes de récurrence par chaînes et orbites périodique

Si C est une classe isolée de $f \in \mathcal{R}$, alors C contient un point récurrent $x \in C$. Soit $\mathcal{U}$ un C^1 voisinage ouvert de f et V un voisinage filtrant de C tel que pour tout $g \in \mathcal{U}$ l'ouvert V contient au plus une classe. Le point x peut être rendu périodique hyperbolique par une C^1-petite perturbation g de f. On en déduit qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ dense dans $\mathcal{U}$ tel que, pour tout $g \in \mathcal{U}_0$, $\mathcal{R}(g) \cap V$ est ou bien vide, ou bien contient un point périodique hyperbolique. On en déduit, par un argument standard de généricité, analogue à celui de la section 2.2 ci-dessus

Théorème 2.2. *Il existe une partie résiduelle $\mathcal{G} \subset Diff^1(M)$ telle que pour tout $f \in \mathcal{G}$ et pour toute classe isolée C de f il existe un point périodique hyperbolique p tel que $C = C(p)$.*

Si deux orbites périodiques hyperboliques appartiennent à deux classes différentes, elles sont séparées par une région attractante et le sont donc robustement. Un argument standard de généricité permet alors de montrer:

Théorème 2.3. *Il existe une partie résiduelle $\mathcal{G} \subset Diff^1(M)$ telle que pour tout $f \in \mathcal{G}$ et tous points p ériodiques $p, q \in Per(f)$, les points p et q sont hyperboliques et, si les classes de récurrence par chaînes $C(p)$ et $C(q)$ coïncident alors elles coïncident robustement: il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f tel que pour tout $g \in \mathcal{U}$ on a $C(p_g) = C(q_g)$ où p_g et q_g sont les continuations de p et q.*

2.5 Difféomorphismes modérés et difféomorphismes sauvages.

Soit $f\colon M \to M$ un difféomorphisme d'une variété fermée. On dit f est *modéré* si toutes ses classes de récurrence par chaînes sont isolées et contiennent un point périodique hyperbolique; les classes de récurrences par chaînes sont en particulier en nombre fini, et ce nombre est continu donc localement constant au voisinage de tout difféomorphisme modéré. On note $\mathcal{T}(M) \subset Diff^1(M)$ l'ensemble des difféomorphismes modérés de M.

C'est un C^1-ouvert, qui contient la classe Axiome A sans cycles.

En conséquence d'un résultat de Pujals et Sambarino, on obtient que, pour toute surface fermée S, l'ouvert des difféomorphismes Axiome A sans cycles de S est dense dans $\mathcal{T}(S)$.

Notons $\mathcal{T}_{non-hyp}(M) = \mathcal{T}(M) \setminus \overline{\{\text{Axiome A sans cycles}\}}$ l'ouvert des difféomorphismes modérés, robustement non-hyperboliques. Nous verrons, à l'aide d'un procédé de construction d'exemples, que:

Théorème 2.4. *$\mathcal{T}_{non-hyp}(M)$ est non vide pour toute variété de dimension au moins 3.*

Un difféomorphisme est dit *sauvage* s'il est loin des mod érés; plus précisément, notons

$$\mathcal{W}(M) = Diff^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T}(M)};$$

un difféomorphisme est sauvage s'il appartient à l'ouvert $\mathcal{W}(M)$.

Par construction $\mathcal{T}(M)$ et $\mathcal{W}(M)$ sont deux ouverts disjoints dont l'union est dense dans $Diff^1(M)$.

Corollaire 2.2. *Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble générique donné par le Théorème 2.1. Alors tout difféomorphisme $f \in \mathcal{R} \cap \mathcal{W}(M)$ possède une infinité de classe de récurrence par chaînes.*

On conjecture (conjecture de Smale) que,

Conjecture 2.3. *pour toute surface fermée S, l'ensemble $\mathcal{W}(S)$ est vide.*

Par contre, [BD$_1$, BD$_2$] montre que

Théorème 2.5. *$\mathcal{W}(M) \neq \emptyset$ pour toute variété compacte M telle que* $\dim M \geq 3$.

3 Les exemples de Shub et de Bonatti-Díaz

En 1971, Mike Shub[Sh] a contruit le premier exemple de difféomorphisme robustement transitif non-hyperbolique. C'était par là même le premier exemple de classe isolée de difféomorphisme C^1-gérique.

Il est remarquable que cet exemple est en fait à l'origine de la théorie *partiellement hyperbolique* (voir [HPS]).

En 1996 avec Lorenzo Díaz, et répondant à une question de Mañé (sur l'existence de difféomorphismes robustement transitifs isotopes à l'identité), nous avons donné un procédé de construction de nombreux nouveaux exemples, qui, après coup, relève de la même philosophie que celle de l'exemple de Shub.

3.1 Description de l'exemple de Shub et énoncé

On considère un difféomorphise d' Anosov transitif $A\colon T^2 \to T^2$. Soit $p_0 \in T^2$ un point fixe de A.

Notons $C > 1$ l'expansion minimale de A et de A^{-1} dans leurs directions instables respective:

$$C = \inf_{x \in T^2} \left\{ \|DA^u(x)\|, \frac{1}{\|DA^s(x)\|} \right\}.$$

Quitte à remplacer A par un de ses itérés, on peut supposer que C est assez grand pour qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de diffeomorphismes de T^2 vérifiant:

- $\mathcal{U}$ est connexe,
- pour tout $g \in \mathcal{U}$ on a $\|Dg\| < C$ et $\|Dg^{-1}\| < C$,
- $\mathcal{U}$ contient un difféomorphisme d'Anosov $B\colon T^2 \to T^2$,
- $\mathcal{U}$ contient un difféomorphisme g qui n'est pas d'Anosov.

Théorème 3.1. *Avec les notations ci-dessus, tout difféomorphisme $F\colon T^2 \times T^2 \to T^2 \times T^2$ verifiant:*

- *$F(x, y) = (A(x), g_x(y))$ où $g_x \in \mathcal{U}$*
- *g_{p_0} est Anosov*

est robustement transitif.

La preuve découle assez facilement des résultats classiques de dynamiques partiellement hyperboliques. Elle fait l'objet des sections suivantes.

3.2 Hyperbolicité partielle

Lemme 3.1. *Avec les hypothèses du théorème, il existe une décomposition DF-invariante*

$$T_x(T^4) = E^{ss} \oplus E^c \oplus E^{uu}$$

qui est partiellement hyperbolique.

De plus E^{ss} se projette sur la direction stable de A et E^{uu} se projette sur la direction instable de A.

Démonstration : Cela résulte de la condition $\|Dg\| < C$ et $\|Dg^{-1}\| < C$. Il existe alors un champ de cônes autour de la direction horizontale (i.e. tangente aux tores horizontaux $T^2 \times \{y\}$) qui est strictement invariant par DF (l'image du cone ferme est incluse dans un cone plus petit). De plus pour tout vecteur dans le cone, la composante horizontale instable est uniformement dilatee.

Meme chose autour de la direction stable. □

3.3 Feuilletages stables et instables fort

Il existe alors des feuilletages stables fort et instables forts, dirigés part E^{ss} etE^{uu}, invariant par F. L'existence de ces feuilletages est assez jolie: en effet les champs de directions E^{ss} et E^{uu} ne sont pas assez réguliers pour assurer l'unique integrabilité: cette unique integrabilité est donnée par des raisons dynamiques : toute courbe tangente à E^{ss} a la longueur de ses itérés par f^n, $n > 0$ qui décroit exponentiellement avec la vitesse donnée par la contraction de E^{ss}. On montre que deux telles courbes partant d'un même point doivent coïncider: le troisième côté du triangle serait tangent à la dsirection centre instable mais devrait decroître à la meme vitesse, contredisant la domination.

De plus la structure partiellement hyperbolique persiste par C^1 perturbation de F et les feuilles stables fortes et instables fortes varient continument. Plus précisément, pour tout $x \in T^4$ notons $W^u_\delta(x, g)$ le segment de feuille instable forte,de longueur 2δ centré en x. La famille $\{W^u_\delta(x, g)\}_{x \in M}$ est une famille continue de segments compacts plongés dans M et cette famille varie continûment avec g.

La direction centrale est tangente aux tores verticaux $\{x\} \times T^2$.

3.4 Robuste densité des variétés stable et instable de la fibre $\{p_0\} \times T^2$

En particulier, la fibre $\{p_0\} \times T^2$ au dessus de p_0 est un tore invariant par F et normalement hyperbolique.

En consequence, d'après un théor'eme de Hirsch Pugh et Shub, [HPS] il existe un voisinage de F pour lequel le tore invariant persiste et varie continuement avec le diffeomorphismes, en topologie C^1 pour le tore comme pour la dynamique. Appelons le T_G, pour G proche de F.

La variété stables $W^s(T_G)$ est l' union des feuilles stables fortes de G passant par les pointr de T_G. C'est une variété (difféomorphe à $T^2 \times \mathbb{R}$) de classe C^1, et variant continûment avec G.

Lemme 3.2. *Il existe un voisinage $\mathcal{U}_1$ de F tel que, pour tout $G \in \mathcal{U}_1$, les variété stables et instables de T_G sont denses dans T^4.*

Démonstration : Pour F , la variété stable de T_F coupe transversalement tout segment de feuille instable forte. On en déduit qu'il exite δ tel que la variété stable de taille δ de T_F coupe tout segment de feuille instable stable forte de taille δ. On en déduit que, pour G proche de F la variété stable de taille 2δ de T_G coupe tout segment de feuille instable forte de longueur 2δ.

Les itérés par G^{-n} de la variété stable locale de T_G sont contenus dans la variété stable globale de T_G et ils coupent les itérés correspondants des segments de feuilles instables fortes, qui sont des segments de longueur arbitrairement petite:

on a montré que $W^s(T_G, G)$ coupe tout segment non trivial de feuille instable forte: en conséquence $W^s(T_G, G)$ est dense dans T^4. □

3.5 Robuste densité des variétés invariantes d'un point fixe de F

Soit $x_0 \in T_F$ un point fixe de F (remarquons que $x_0 = (p_0, q_0)$ où q_0 est un point fixe de B).

La restriction de G à T_G est un diffeéomorphisme d'Anosov B_G proche de B. Le point x_0 a une continuation x_G. Notons $w^s(x_G)$ la variété stable de x_G pour B_G. Remarquons que $w^s(x_G)$ est dense dans T_G, car B_G est un difféomorphisme d'Anosov du tore T_G.

La variété stable $W^s(x_G, G)$ est l'union des feuilles stables fortes passant par les points de $w^s(x_G, G)$. On en déduit que $W^s(x_G, G)$ est dense dans $W^s(T_G, G)$ donc dans T^4. On a donc montré:

Lemme 3.3. *Pour tout difféomorphisme G de T^4 suffisamment C^1-proche de F, les variétés invariantes $W^s(x_G, G)$ et $W^u(x_G, G)$ du point périodique hyperbolique x_G sont denses dans T^4.*

3.6 Transitivité robuste de F

On vient de voir que, pour tout G suffisamment C^1 proche de F les variétés invariantes de x_G sont denses dans T_4.

Soient U et V deux ouverts quelconques de M. La variété stable de x_G coupe U. Les itérés $f^n(U)$ s'accumulent dont sur $W^u(x_G)$. Comme $W^u(x_G)$ coupe V, il existe $n > 0$ tel que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset,$$

c'est à dire que G est *topologiquement ergodique* donc transitif.

3.7 Généralisations

3.7.1 Généralisations directes (mais non publiées)

Soit K un ensemble basique hyperbolique d'un difféomorphisme $f\colon M \to M$. On considère des applications $F\colon M \times N \to M \times N$ de la forme $F(x, y) = (f(x), g_x(y))$ de façon que la dynamique horizontale soit dominée par la dynamique verticale. Cette hypothèse suffit à savoir qu'il existe un voisinge filtrant U de $K \times N$ et un voisinage $\mathcal{O}$ de F tel que pour tout $G \in \mathcal{O}$ le maximal invariant de g dans U est une lamination normalement hyperbolique, homéomorphe à $K \times N$, l'action de G sur l'espace des fibres $\{\{x\} \times N\} \simeq K$ étant conjuguée à f.

On suppose que, pour un point fixe x_0 de f, l'application f_{x_0} soit un difféomorphisme d'Anosov transitif. Alors

Théorème 3.2. *l'ensemble $K \times N$ est un ensemble robustement transitif.*

Démonstration : La preuve est essentiellement identique à celle du théormème de Shub et montre que la continuation de $K \times N$ est robustement contenue dans l'adhérence des variétés stable et instable d'une même orbite périodique. Cependant, dans le cas ou K n'est pas la variété M toute entière, ceci n'est pas suffisant pour prouver la transitivité de robuste de $K \times N$. On prouve un peu plus: les intersections homoclines de cette orbite periodiques contiennent robustement $K \times N$ dans leur adherence. $K \times N$ est donc robustement la classe homocline de l'orbite periodique, et est donc robustement transitif. □

Dans l'exemple ci-dessus on peut affaiblir l'hypothèse *le difféomorphisme f_{x_0} est d'Anosov*; voci des exemples d'affaiblissement

1. on peut juste supposer: *il existe un point periodique p de f_{x_0} dont les variété invariantes stables et instables sont robustement denses dans N.* Cette hypothèse n'est toute fois pas suffisante pour que je sache prouver que $K \times N$ coincinde robustement avec la classe homocline du point (x_0, p). On peut prouver la robuste transitivite en remarquant qu'une famille dense dans $K \times N$ de fibres $\{x\} \times N$ correspondent aux intersections homoclines d ela fibre $\{x_0\} \times N$, et que les variété stable et instable de l'orbite du point periodique (x_0, p) sont dense dans chacune de ces fibres.

2. plus faible encore: on peut supposer que *locallement génériquement, les variétés stables et instables de (x_0, p) sont denses dans la fibre $\{x_0\} \times N$*: c'est le cas si *le difféomorphisme f_{x_0} etait robustement transitif*, ou robustement récurrent par chaînes. Dans ce cas, le point (x_0, p) continent localement génériquement (la continuation de) $K \times N$ dans l'adhérence de ses variétés stables et instables. Dans ce cas $K \times N$ est robustement récurrent par chaînes, mais même dans le cas où f_{x_0} est robustement transitif, je ne sais pas si $K \times N$ est robustement transitif.

   Problème 1. *Montrer que, sous les hypothèses de cette section, si f_{x_0} est robustment transitif, alors $K \times N$ est un ensemble robustement transitif de F (Ou donner un contre exemple!!)*

Remarque 3.4. *Si K etait un attracteur hyperbolique, $K \times N$ devient un attracteur robuste.*

3.7.2 Principe général de cette classe d'exemples

Dans cette classe d'exemple, on considère

1. un ensemble K avec un voisinage isolant (K est l'ensemble maximal invariant dans un voisinage de K). Fixon U un voisinage isolant de K relativement compact dans un voisinage isolant plus grand.

2. une structure partiellement hyperbolique $E^{ss} \oplus E^c \oplus E^{uu}$ définie sur K

3. un point périodique x dont on sait que:

   - sa variété stable contient robustement dans son adhérence une variété V^s (robustement) invariante (par ex. variété stable d'une variété compacte normalement hyperbolique) de dimension supérieure ou égale à $\dim(M) - \dim E^{uu}$, et qui coupe transversalement toutes les feuilles instables fortes (des points de l'ensemble).

- sa variété instable contient robustement dans son adérence une variété instable V^u (ou au moins robustement invariante) de dimension supérieure ou égale à $\dim(M) - \dim E^{ss}$, et qui coupe transversalement toutes les feuilles stables fortes des points de l'ensemble K.

Sous ces hypothèses, les variétés stables et intables de x contiennent robustement le maximal invariant K_g de g dans U. On en déduit que K_g est récurrent par chaînes. Si K était la variété M, on en déduit que g est transistif.

Si K était un attracteur, K_g sera également un attracteur.

3.8 Exemples de Bonatti-Dìaz

Les *mélangeurs* sont spécifiquement fait pour assurer que la variété stable d'une orbite périodique hyperbolique puisse robustement contenir dans son ad érence une variété stable de dimension plus grande. Ces mélangeurs apparaissent de façon naturelle lors de bifurcation type cycles hetérodimensionnels.

Ce nous a permis de construire des exemples:

- de difféomorphismes robustement transistif obtenus comme C^∞-petites perturbations du temps 1 de flots d'Anosov transitif;
- plus generalement, des attracteur robustement transitifs par perturbations du temps 1 d'attracteur hyperrbolique de champs de vecteurs,
- des diffeomorphismes robustement transitifs obtenus par petites perturbations de produits $(f, id)\colon M \times N \to M \times N$ ou f est d'Anosov, et N est une variété compact quelconque.

  On peut aussi considerer un produit $K \times N$, où K est un ensemble basique d'un difféomorphisme f.

Idée de la preuve : Que ce soit dans le cas *temps 1 du flot d'Anosov* ou le cas *produit d'un Anosov par des rotations sur* $M \times S^1$, on a des cercles invariants γ_i, $i = 1, 2$ tels que:

- les γ_i sont normalement hyperboliques, donc perrsistent par perturbation
- la restriction de f à chacun des cercle est une rotation
- les variétés stables et instables $W^s(\gamma_i)$ et $W^u(\gamma_i)$ sont robustement denses dans la variété (ils coupe transversalement tout segment des feuilletages fort (instable et stable, respectivement).

Une pertite perturbation de f permet de creer exactement deux orbites periodiques hyperbolique dans chacun des γ_i de façon que la dynamiques sur γ_i soit une dynamique "'nord sud"' hyperbolique. On peut de plus creer des cycles heterodimensionnels entre les orbites périodique d'indices différents de γ_1 et γ_2. Ces cycle permettent d'obtenir que les variétés invariantes stables et instables des orbites periodique s contiennent robustment dans leur adhérence les variété stables et instables des cercles γ_i ce qui permet de conclure.

$\square$

Il est clair que l'on est loin d'avoir complètement exploré les exemples qui suivraient ces idées.

Remarque 3.5. *Les perturbations du produit d'un hyperbolique du plan (Fer à cheval ou attracteur de Plykin) par l'identité (ou une rotation, ou un produit fibré de rotations de S^1, etc...) vivent naturellement dans $\mathbb{D}^2 \times S^1$ qui se plonge naturellement dans $\mathbb{R}^3$. De plus,n ils sont isotopes à l'identité et se prolongent donc assez facilement en des difféomorphismes de la boule $\mathbb{B}^3$. Ceci permet de construire des classes robustement isolées, non hyperboliques, sur toute variété de dimension ≥ 3.*

Même chose en perturbant le champs de vecteur obtenu par suspension d'un Plykin.

Corollaire 3.6. *Pour toute variété fermée M de dimension $\dim M \geq 3$, l'ouvert $\mathcal{T}_{non-hyp}(M)$ des difféomorphismes modérés robustement non hyperboliques de M est non-vide.*

Remarque 3.7. *Les exemples produit ainsi sont partiellement hyperboliques avec trois fibrés de dimension 1. Ils sont de plus d'indice de Poincaré Hopf nul.*

4 Exemples de Mañé, Carvalho, Bonatti-Viana

Dans [Ma$_1$] (1978) Mañé construit un nouvel exemple de difféomorphisme robustement transitif, cette fois sur le tore T^3, qui fait lui aussi appel de façon essentielle à l'hyperbolicité partielle. Dans [Ca], Maria de Fatima de Carvalho (étudiante de Mañé) reprenait l'argument de Mañé pour construire un attracteur robustement transitif, sans direction stable forte, et montrer l'existence de mesure SRB dans ce cadre. La preuve de la robuste transitivité comportait une lacune, qui a été comblée dans [BV] qui construit également les premiers exemples de difféomorphismes robustement transitifs qui ne sont pas partiellement hyperboliques: ils ne laissent invariant aucun fibré uniformément contractés ou dilatés.

4.1 Un attracteur robustement transitif, sans direction stable

4.1.1 Description de l'exemple, énoncé du théorème

On considère un difféomorphisme d'Anosov linéaire f_0 du tore T^3, ayant deux directions contractantes et une direction expansive. On suppose que $\|Df_0^s\| < \lambda < \frac{1}{3}$ et $|Df_0^u| > \lambda^{-1} > 3$.

On considère un point fixe p_0. On fixe une constante $\delta > 0$ et on note V_2 la boule de rayon 3δ autour de p_0. On choisit $\delta > 0$ assez petit pour que la distance entre deux releve de V_2 dans $\mathbb{R}^3$ soient supérieure à 100δ. On note V_1 la boule de rayon $\frac{\delta}{2}$ centrée en p_0

Lemme 4.1. *Il existe $\alpha > 0$ et $L > 0$ ayant la propriété suivante:*

tout segment de courbe γ de longueur supérieure à L et faisant un angle inférieur à α avec le feuilletage instable de f_0 coupe tout disque de rayon 2δ tangent au feuilletage stable de f_0.

Démonstration : C'est une conséquence directe de la densité de toute feuille du feuilletage instable fort de f_0. □

On fait une perturbation f_1 de f avec les propriétés suivantes:

1. f_1 preserve le feuilletage centre stable de f_0, noté $\mathcal{F}_1^c$.
2. Df_1 preserve strictement un champ de cônes d'angle inférieur à α autour de la direction instable de f_0. De plus les vecteurs de ce cône sont dilaté d'un facteur supérieur à $\lambda^{-1} > 3$.
3. f_1 coincide avec f_0 en dehors de V_1.

4. Le point p_0 est répulseur pour f_1,

5. Il existe un point periodique q dont l'orbite est disjointe de V_2;

6. il existe un voisnage $V_0 \subset V_1 \cap W^u(p_0, f_1)$ de p_0 tel que le determinant de $(Df^{cs})^{-1})$ et > 1 en dehors de f_1.

Théorème 4.1. *Avec ces hypothèse il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f_1 tel que tout $g \in \mathcal{U}$ a exactement deux classes de récurrence par chaînes qui ont*

- *le point répulseur p_g, cotniunation de p_1;*
- *$T^3 \setminus W^u(p_g)$, qui de plus est la classe homocline de q_g, donc est transitif.*

4.1.2 Construction d'un diffeomorphisme f_1 vérifiant les hypothèses du théorème

La seule difficulté est la preservation du champ de cônes instable fort, d'angle α arbitrairement petit... pour cela on fait d'abor une perturbation abstraite, sur un cylindre produit de disque stable par un dique instable, preservant les disques stables et l'expansion instable dominant la dynamique dans les disque stables. Une telle perturbation preserve un cône, mais peut être très larque. On conjugue alors cette perturbation par une application linéaire qui est une homothétie dans les diques stables et est l'identité dans la direction instable. (un e telle application linéaire commute avec l'Anosov linéaire initial: ainsi on ne change rien au bord du cyclindre). Par contre le champ de cône instalbe preserve est l'impage par nontre application linéaire du champ initiallment preservé: cela perrmet de refermer ce cêne en un cône arbitrairement étroit.

4.1.3 principe de la preuve

Le théorème est une conséquence directe du lemme ci-dessous:

Lemme 4.2. *Pour tout disque D tangent au feuilletage central et non contenu dans $W^u(p_g)$, il existe $n > 0$ tel que le rayon interne de $g^{-n}(D)$ est supérieur à 2δ.*

Admettons le lemme pour l'instant et prouvons le Théorème. D'après le lemme, la variété stable du point q_g contient donc un disque (central) dont le rayon interne et plus grand que 2δ. Il coupe donc tout segment instable de f dee longueur $2L$. On en déduit que $W^s(q$ coupe tous les segments instables de façon denses. D'autre part, le meme argument implique que $W^u(q)$ coupe tout disque central non-inclus dans $W^u(p_g)$. En conséquence $W^u(p_g)$ est dense dans $T^3 \setminus W^u(p_0)$. Les deux ensemble, cela donne que les points homoclines de q sont denses dans le complémentaire du bassin de q. Ceci prouve le théorème.

4.1.4 Preuve du lemme

S'il existe un point $x \in D$ dont les itérés négatifs $g^{-n}(x)$ sont tous hors de V_2 alors on construit par récurrence une suite de disques D_i tel que D_i soit le plus grand disque centré en $g^{-i}(x)$ et contenu dans $g^{-1}(D_{i-1})$. Tant que le rayon de D_i est inférieur à 2δ, le disque D_i est disjoint de V_1. Or $(f_1)^{-1} = f^{-1}$ sur $T^3 \setminus V_1$, donc g^{-1} (proche de f_1^{-1}) est une dilatation dans la direction centre stable, de rapport proche de 3. Les rayon de D_i croissent donc exponentiellement, tant qu'il n'ont pas atteient la valeur 2δ.

Pour conclure la preuve, il reste à montrer

Lemme 4.3. *Pour tout disque D tangent au feuilletage central et non contenu dans $W^u(p_g)$, il existe un point $x \in D$ et un entier $N > 0$ tel que $g^{-n}(x) \notin V_2$ pour tout $n \geq N$.*

Le preuve se fait en deux temps: on montre d'abord

Lemme 4.4. *tout disque D a un itéré $g^{-n}(D)$ dont le diametre central (i.e. la plus grande distance (le long des feuilles centrales) entre deux points) est supérieur à 100δ.*

Démonstration : Si le disque est disjoint de $W^u(p_g)$ (bassin du repulseur) alors son aire centrale croit exponentiellement, car tous ses itérés sont dijoint de V_0.

Sinon quitte à remplacer D par un de ses itérés négatifs on peut supposer qu'il rencontre V_0 et est inclus dans V_2 . Sa projection sur la feuille centrale $\mathcal{F}^c_{p_0}$ le long des feuilles intables forte n'est pas incluse dans la composante connexe de $W^u(p_0) \cap \mathcal{F}^c_{p_0}$ contenant p_0. Soit O un ouvert de D qui ne se projette pas dans cette composante connexe. Les itéré négatifs de O ont une aire qui croit exponentiellement, jusquà ce que $f^{-i}(O)$ rencontre de nouveau V_0, en un autre composante connexe de l'intersection de la feuille centrale avec V_0. La distance avec deux telles composantes est supétieure à 100δ ce qui conclut.

□

Démonstration : On suppose désormais que le diamètre central de D est superieur à 100δ. Comme les intersections de ce disque avec deux composante distinctes de l'intersection de la feuille centrale qui le porte avec V_2 sont distantes de plus de 100δ, on en déduit qu'il existe un disque $D_1 \subset D$ de diametre supérieur à 40δ et disjoint de V_2. Alors $g^{-1}(D_1)$ a un diamètre plus grand que 100δ, ce qui permet de construire par récurement une suite de disques $D_{i+1} \subset g^{-1}(D_i)$, de diamètre plus grand que 40δ et disjoints de V_2. L'intersection des $g^i(D_i)$ est le point annoncé, dont l'orbite negative est disjointe de V_2. □

4.2 Particularités de cet exemple

Il s'agit d'un arttracteur robuste, ayant une direction instable forte, et une direction centre stable de dimension 2 qui ne peut pas etre sciende pour creer une direction stable.

En supposant le difféomorphismes C^2, et d'autres hypothèses, Maria de Fatima Carvalho prouvait l'existence d'une unique mesure SRB. Sinon, je dirait que cet attracteur est completement méconnu. En particulier sa topologie.

Le fait que les bifurcations ne peuvent pas creer de points hors de l'attracteur est mal compris. Toute étude serait la bienvenue!

4.3 Idee de l'argument de Mañé

L'argument de Mañé est juste beaucoup plus simple: on prend un Anosov du tore T^3 avec 3 valeurs propre réelles de module distinct, deux contractantes et une dilatante. On fait une perturbation de cet Anosov dans un tout petit voisinage d'un point fixe, en preservant la structure partiellement hyperbolique avec 3 fibres de dimension 1, et en preservant le feuilletage central. Cette perrturbation cree un point fixe d'inde different, ce qui interdit d'etre Anosov.

La robuste transitivité peut etre montree de fa c con analogue à celle de l'exemple de Carvalho: les itérés de negatif de tout disque ecntral finissent par contenir un disque de rayon interne fixé, et ces disques coupent toute feuille instable. Pour cela on utilise la direction stable forte pour voir que le disque central contien un point n'ayant qu'un nombre fini d'iteres négatifs dans la boite ou on a perturbe l'Anosov. La fin d el'argument est identique.

4.4 idée de l'argument de Bonatti-Viana

Dans [BV], largument de Mañé Carvalho est adapté pour construire un exemple de diffeomorphisme de T^4 robustement transitife mais sans structure partiellement hyperbolique.

Voici l'idée: on prend un Anosov de T^4 avec deux direction contractante et deux dialtantes. On fait des perutbations au voisinage de deux points fixes. L'une des perturbations garde l'expension mais introduit ue direction legerement dialtante dans la direction stable, et introduit un point avec une varleur propre complexe stabel, pour interdir l'existence d'un sous-fibre stable invariant. La seconde perturbation est identique en inversant les roles des directions stables et instables.

Ces deux perturbations preserve la structure dominée. De plus l'aire centre stable est uniformément contractée et l'aire centre-instabel est uniformément contracté.

On montre que l'on peut obtenir ainsi de difféomorphismes robustement transitifs: lidee est de montrer que les itétré positif de tout disque centre stable finissent par contenir un disque de rayon interne donné . Même chose pour les itéré négatifs des disque centre stables. Ce rayon interne est fixé assez grand pour que tout disque centre stable de ce rayon coupe tout disque centre-instable de ce rayon.

La preuve suit la même idée génerale: utiliser l'expansion en volume dans une disque centre instable pour avoir une croissance du diametre. Utiliser ce diametre grand d'un iteré pour trouver un point de ce disque centre instable dont seul un nobre fini d'itéré positifs rencontre le lieu des perturbations. En deduire que l'es itérés d'un peitit disque centre instable autour de ce point finissent par avoir un grand rayon interne, car on itere essentielleemnt pas l'Anosov initial.

La difficulté ici, c'est l'absence a priori de feuilletage. La croissance du volume centre instable pourrait a priori resulter d'un spiralement local, sans croissance du diamètre.

L'interdiction de ce spiralement est une preuve dynamique (et non topologique).

5 Exemples non publiés

5.1 Attracteurs *type Bonatti- Dìaz* sans direction instable

J'ai construit les premiers exemples d'attracteurs robustes et de difféomorphismes robustement transitifs, sans direction instables comme contrexemple à une annonce (première version de [DPU]). Je les ai présenté en conférence, mais ne les ai pas rédigés. Ils étaient différent des exemples "'Bonatti-Viana"'.

Il s'agissait en fait d'une perturbation des exemples "'Bonatti-Diaz"' obtenus eux même come perturbations du produit d'un Anosov de T^2 ou d'un attracteur hyperbolique par l'identité de S^1.

L'idée est de faire des perturbations

- qui préservent le feuilletages centre instable.
- qui préservent un cône stable fort
- On preserve aussi deux fibres periodiques.

Une première partrie reprend l' argument de Bonatti Diaz:

Dans chacune de ces fibres, le difféomorphisme aura deux orbites periodiques, la dynamique en restriction a la fibre etant de type nord-sud. Ces orbites perriodiques sont des selles d'indinces différent dans l'espace ambiant. On utilise les intersections des varétés stables et instables de ces deux fibres periodiques pour creer des cycles hetérodimensionnels entre les orbites periodiques qu'elles portent. Ces cycles permettent de faire des mélangeurs. Ces mélangeur permettent d'assures que les variétés instables, de dimension 1, des selles p_0, p_1 d'indice 2 contenues dans les 2 fibres choisies, contiennent dans leur adhérence les feuilles centre instables les contenant. Ces feuilles centre instables coupent tous les segment stables forts et sont donc robustement denses.

La nouveauté consiste en la preuve de la densité des variété stable. En effet on introduit, par perturbation, un point periodique ayant une valeur propre instable complexe. Ceci brise l'existence d'une direction instable forte. Par contre on preserve la dilatation uniforme d e l'aire dans la direction centre instable.

Les itéré d'un disque centre-instable D quelconque auront leur aire qui croit exponentiellement. Mais les feuilles centre instable sont des cyclindres de géométrie bornée: ils sont feuilleté en cercles de longueurs a peu près constante.

On en déduit que les itéres $f^n(D)$ ne peuvent pas rester dontenus dans des cyclindres de feuilles de hauteurs bornée. Or, le variété stables locales des deux fibres S^1 preservées coupent les feuilles centre instables en cyclindres de hauteur bornée. On en déduit que les itétré $f^n(D)$ coupent les variété stables des fibres perservées, et donc des points p_0 et p_1.

Ceci assure la robuste transitivité, dans le cas où l'on est parti du produit de l'Anosov par une rotation, et assure que c'est une classe isolée dans le cas du produit d'un attracteur par une rotation.

5.2 Perturbations de l'attracteur de Lorenz

Le même type d'arguments m'a permis de croire que je savais faire:

Théorème 5.1. *Il existe des perturbations du temps* 1 *de l'attracteur de Lorenz qui sont robustement isolées.*

Les difficultés ici sont multiples:

- pas de feuilletages centre-instable.
- La variété stable forte de la selle de l'attracteur de Lorenz ne coupe l'attracteur qu'en la singularité.
- ni direction centrale, ni direction instable forte pour la dynamique initiale.

Si quelqu'un veut mettre au point cet exemple avec moi, je suis partant.

6 Attracteurs singuliers

6.1 L'attracteur de Lorenz

L'attracteur de Lorenz (modèle géométrique), est certainement le plus étudié et le mieux compris des exemples de classes robustement isolée non-hyperboliques.

6.2 Exemple de Morales-Pujals

6.3 Attracteur singulier avec des directions instables de dimension arbitraire: exemple de Bonatti-Pumariño-Viana

6.4 Attrateur singulier avec des singularités d'indice different: exemples de Bonatti-Li-Yang

7 Classes de récurrence, orbites périodiques et généricité

Le but de ce chapitre est d'expliquer les résultats suivants de [ABCDW] et [A$_b$BC].

A toute orbite périodique γ d'un difféomorphisme f on associe naturellement une mesure de probabilité μ_γ obtenue en normalisant la somme des mesures de Dirac associées aux points de l'orbite.

Théorème 7.1. *Il existe une partie résiduelle $\mathcal{G} \subset Diff^1(M)$ telle que, pour tout $f \in \mathcal{G}$ et pour tout classe de récurrence par chaîne C de f, on a:*

- *l'ensemble des indice des orbite periodiques contenues dans C est un intervalle de $\mathbb{N}$.*
- *l'adhérence de l'ensemble des mesures de probabilité périodiques contenue dans C est convexe.*
- *si de plus C est une classe isolée, alors cette adhérence est l'ensembble des probabilités invariantes supportée dans C.*

Corollaire 7.1. *Pour tout difféomorphisme f C^1-générique et toute classe isolée C de f, les mesures invariantes, supportées par C, génériques sont:*

- *ergodiques*
- *de support égal à C*

7.1 Classe homocline

Si x est un point périodique hyperbolique de type selle d'un difféomorphisme f, on appelle *classe homocline de x pour f* et on note $H(x, f)$ ou $H(x)$ l'adhérence de l'ensemble des points d'intersection entre les variétété stables et instables de (l'orbite de) x:

$$H(x, f) = \overline{W^s(Orb(x), f) \pitchfork W^u(Orb(x, f))}.$$

C'est par définition un compact de M, invariant par f. Le Λ-Lemma ou Lemme d'inclination implique :

Lemme 7.2. *La classe homocline $H(x)$ est transitive.*

Il s'agit donc d'un ensemble transitif contenant x et canoniquement associé à x. En particulier,

Corollaire 7.3. *Pour tout f et tout point periodique hyperbolique x, la classe homocline $H(x)$ est incluse dans la classe de récurrence par chaines $C(x)$.*

Smale a montré que tout point d'intersection homocline transverse de x est contenu dans un *fer à cheval* (ensemble basique hyperbolique) d'un itéré de f, qui contient également le point periodique x. On en déduit une autre caractérisation de la classe homocline:

On dit que deux points periodiques hyperboliques x et y sont homocliniquement équivalent si la variété stable de l'orbite de x coupe transversalement l'instable de l'orbite de y, et reciproquement si la variété instable de l'orbite de x coupe transversalement la stable de l'orbite de y. On note $x \sim y$.

Le Lemme d'inclinaison implique que cette relation est une relation d'équivalence entre les orbites périodique hyperboliques de f. L'argument d eSmale ci-dessus montre:

Théorème 7.2. *Pour tout f et tout point périodique hyperbolique x la classe homocline $H(x)$ est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques homocliniquement équivalents à x.*

En particulier, les point périodiques sont denses dans $H(x)$.

7.2 Le lemme de connection d'Hayashi

En 1998, pour terminer la preuve de la conjecture de la stabilité pour les champs de vecteurs, Hayashi a mis au point un raffinement du lemme de fermeture de Pugh.

7.3 Classes de récurrence par chaînes et classes homoclines de difféomorphismes génériques

Théorème 7.3. *Il existe une partie résiduelle $\mathcal{G} \subset Diff^1(M)$ telle que pour tout $f \in \mathcal{G}$ et tout point periodique $x \in Per(f)$, la classe homocline de x est sa classe de récurrence par chaînes:*

$$H(x) = C(x).$$

7.4 Classes de récurrence par chaînes et intersection hetéroclines

Théorème 7.4. *Il existe une partie résiduelle $\mathcal{G} \subset Diff^1(M)$ telle que pour tout $f \in \mathcal{G}$ et tous points periodiques $p, q \in Per(f)$; supposons $C(p) = C(q)$ et supposons que $\dim E^s(p) + \dim E^u(q) \geq \dim M$.*

Alors la variété stable de p coupe transversalement la variété instable de q.

En particulier, si p et q ont même indice, ils sont homocliniquement reliés.

8 Décompositions dominées

le but de ce chapitre est de montrer que pour qu'une classe soit (robustement) isolée, il faut qu'elle porte une structure globale, appelée décomposition dominée, et plus précisément une hyperbolicité (partielle) en volume.

Ces décomposition dominées sont également la seule obstruction a l'existence d'une bifurcation très riche appelée tangence homocline. Nous verrons que l'absence de tangence homoclines pour des classes isolée necessite une structure dominée très rigide où les fibrés centraux sont tous de dimension 1.

8.1 Décompositions dominées

Soit $X \subset M$ un ensemble f-invariant. Une décomposition $TM|_X = E_0 \oplus \cdots \oplus E_k$ est *dominée* si:

- la dimension des espaces $E_i(x)$ est indépendante de $x \in X$;
- la décomposition est Df-invariante: $E_i(f(x)) = Df(E_(x))$;
- il existe $n > 0$ tel que pour tout $x \in X$ et tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$ on ait

  $$\|Df|_{E_i(x)}\| \leq \frac{1}{2}\mathcal{M}(Df|_{E_{i+1}(x)})$$

  où $\mathcal{M}(A)$ désigne l'expansion minimale de l'application linéaire A c'est à dire $\mathcal{M}(A) = \|A^{-1}\|^{-1}$.

On note

$$E_0 \oplus_< E_1 \oplus_< \cdots \oplus_< E_k.$$

Une décomposition dominée est toujours continue, s'étend de façon unique à l'adhérence ede X, persiste par petite perturbation de f sur le maximal invairant d'un voisinage de $\overline{X}$, et est unique si l'on prescrit la dimension $\dim(E_i)$ (voir par exemple [BDV, Appendix B] pour les propriétés élémentaires des décompositions dominées).

8.1.1 Décomposition domiée la plus fine

Une décomposition $TM|_X = F_0 \oplus_< \cdots \oplus_< F_\ell$ *raffine* $E_0 \oplus_< E_1 \oplus_< \cdots \oplus_< E_k$ si pour tout $j \in \{0, \dots, \ell\}$ il existe $i \in \{0, \dots, k\}$ tel que $F_j \subset E_i$. Dans ce cas chaque E_i se décompose en une somme directe de F_j successifs.

[BDP] montre qu'il existe une unique décomposition n'admettant aucun raffinement. On l'appelle *la décomposition dominée la plus fine*. Elle est dite *triviale* si $k = 0$, c'est à dire que X n'adment aucune décomposition dominée.

8.1.2 Hyperbolicité partielle, en volume, etc..

Un des fibrés E_i de la décomposition sera dit *hyperbolique* s'il est *uniformément contracté* (il existe n tel que pour tout $x \in X$, $\|Df|_{E_i(x)}\| < \frac{1}{2}$) ou uniformément dilaté (il existe n tel que pour tout $x \in X$, $\mathcal{M}(Df|_{E_i(x)}) > 2$).

Bien sur, si E_i est contracté, il en est de même pour les E_j $j \leq i$.

On dira que la décomposition est *partiellement hyperbolique* si E_0 ou E_k est hyperbolique. Beaucoup d'auteur supposent que E_0 et E_k sont hyperbolique.

Suivant la terminologie introduite dans [BDP], nous dirons que la décomposition est *volume (partiellement) hyperbolique* si le determinant est uniformément contractant sur E_0 et qu'il est uniformément dilatant sur E_k.

8.2 Hyperbolicité en volume pour les classes isolées

Théorème 8.1. *Soit $\mathcal{U} \subset Diff^1(M)$ un C^1-ouvert et $V \subset M$ tel que V est filtrant pour tout $f \in \mathcal{U}$ et $K_f = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V)$ est récurrent par chaîne (i.e. est une classe robustement isolée).*

Il existe un ouvert dense $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{U}_0$, K_f admet une décomposition volume partiellement hyperbolique, ou est un puits ou une source.

Remarque 8.1. *Dans le théorème ci-dessus, $\mathcal{U}_0$ contient les difféomorphismes f tels que K_f est transitif, ou tels que K_f est limite de K_{f_n} qui sont points de continuités de la fonction $g \mapsto K_g$(ceci équivaut à ce que K_f est limite d'orbites périodique γ_n d'une suite f_n convergeant vers f). Autrement dit les éléments $f \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_0$ sont tels que toute perturbation générique de f fait décroitre K_f d'une constante > 0.*

Je ne sais pas s'il y a de tels exemples connus.

La semi-continuité supérieure de l'application $g \mapsto K_g$ implique que, si K_f admet une structure volume partiellement hyperbolique, il en va de même pour K_g pour g proche de f: en effet K_g est contenu dans un voisinage arbitrairement petit de K_f. Dans le théorème, seule la densité est à prouver.

Corollaire 8.2. *Pour f générique, toute classe isolée est volume partiellement hyperbolique ou est une orbite periodique puits ou source hyperbolique.*

8.3 Idée de la démonstration

8.3.1 existence d'une décomposition dominée

On suppose que K_f n'est pas lui même un puits ou une source hyperbolique.

On considère une suite d'orbites γ_n periodiques de difféomorphismes f_n telles que les γ_n convergent vers K_f en topologie de Hausdorff quand $f_n \to f$ en topoloie C^1. On considère le cocycle linàire des derivée Df_n au dessus de γ_n.

On peut voir ce cocycle comme une suite de suite periodique de matrices bornées et d'inverse bornée.

Un résultat purement algébrique de Mañé, e dimension 2, dans [Ma], généralisé dans [BGV] en dimension quelconque dit que, si le cocycle n'admet pas de domination, alors une perturbation arbitrairement petite du cocycle permet de rendre égales toute les valeurs propres d'une des orbite periodique. Cela la transforme en puits ou en source. Comme K_f est robustement isolé, cela implique que K_{f_n} est reduit à un puits ou une source hyperbolique...je ne termine pas l'argument.

8.3.2 Hyperbolicité en volume

On suppose ici que f est un point de continuité de $g \mapsto K_g$.

On considère à présent la décomposition dominée la plus fine $E_0 \oplus_< \cdots \oplus_< E_k$ sur K_f. Si E_0 n'est pas volume contractant, alors il existe une mesure μ sur K_f pour laquelle $\log \det Df_{E_0} \geq 0$.

Si l'on considère la décomposition de μ en mesure ergodique, l'une au moins d'entre elle doit avoir cette même propriété. On peuut donc supposer μ ergodique.

Le closing lemma ergodique de Mañé dans [Ma] permet alors d ecreer par perturbation une orbite periodique dons la mesure de Dirac associée approche μ. La moyenne de $\log \det Df_{E_0}$ le long de cette orbite periodique est donc $> -\varepsilon$ pour un petit $\varepsilon > 0$.

Une petite perturbation générique g_n fait que K_{g_n} est la classe homocline de cette orbite périodique. On en déduit qu'il existe des orbite periodiques γ_n qui approximent K_g en distance de Hausdorff et pour lesquelles la moyenne de $\log\det Df_{E_0}$ est $> -\varepsilon$.

La suite de γ_n approxime donc K_f d'après notre hypothese que f est un point d e continuité de $g \mapsto K_g$. On en déduit que $Dg_n|_{E_0}$ n'a pas d edécomposition dominée. Un petite perturbation permet alors de rendrent toutes les valeurs propres dans E_0 égales, donc les exposnat coorespondant sont tous $> -\varepsilon$. Un petite perturbation les rends alors tous positif. La domination dit alors que l'on a crée des sources, brisant l'isolation de K_f.

8.4 Tangence et domination

Si un ensemble invariant K possède une décomposition dominée $E \oplus_< F$ avec $\dim E = i$ alors, pour tout orbite periodique γ dans un petit voisinage de K d'indice i (i.e. dont la variété stable est de dimension i) l'angle entre ses direction stable et instable est uniformément (i.e. independemment de l'orbite) minoré. La domination persistant au petite perturbation, cette propriete perrsiste egalement aux petite perturbation.

Si K etait une classe de récurrence par chaînes, cela interdit les tangences homoclines associée aux orbite periodiques d'indice i au voisinage de K, pour les difféomorphismes voisins de f.

En résumé, une décomposition dominée d'indice i est une obstruction aux tangence homoclines associées aux points d'indice i.

Reciproquement, d'après Pujals et Sambarino [PS] (en dimension 2) puis Wen [W_2] puis Gourmelon [Go], si, pour une suite d'orbite periodiques pour $f_n \to f$ d'indice i, la décomposition en stable instalbe n'est pas domiunée, alors une perturbation arbitrairement petite permet de creer des tangences homoclines associées a ces orbites.

Théorème 8.2. *Il existe un ouvert dense $\mathcal{U}$ dans l'ouvert $\mathcal{T}(M)$ de difféomorphismes modérés tel que, si $f \in \mathcal{U}$ si C est une classe de recurrence par chaines de f alors*

- *ou bien C contient une tangence robuste,*
- *ou bien C admet une décomposition dominée $E^s \oplus_< E_1 \oplus_< \cdots \oplus_< E_k \oplus_< E^u$ où E^s est hyperbolique contractant, E^u est hyperbolique dilatant et $\dim E_i = 1$ pour $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

9 Bibliographie

References

[Ab] F. Abdenur, *Generic robustness of a spectral decompositions,* Ann. Sci. École Norm. Sup. **36**, 213–224, (2003).

[A_bBC] F. Abdenur, C. Bonatti, S. Crovisier *Nonuniform hyperbolicity for C1-generic diffeomorphisms* preprint (*presque accepté à* Israel J. of Math)

[ABCDW] Abdenur, F.; Bonatti, Ch.; Crovisier, S.; Daz, L. J.; Wen, L. *Periodic points and homoclinic classes.* Ergodic Theory Dynam. Systems 27 (2007), no. 1, 1–22.

[AS] R. Abraham and S. Smale,*Nongenericity of Ω-stability,*Global Analysis I, Proc. Symp. Pure Math

[Ar_1] M.-C. Arnaud, *Création de connexions en topologie C^1,* Ergod. Th. & Dynam. Syst., **21**, 339–381, (2001).

[Ar_2] M.-C. Arnaud, *Le "closing lemma" en topologie C^1,* Mém. Soc. Math. Fr. **74**, (1998).

[ABV] J. Alves Ch. Bonatti, M. Viana, *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding,* Invent. Math., **140**(2),

[ABC] M.-C. Arnaud, Ch. Bonatti et S. Crovisier, *Dynamiques conservatives génériques,* to appear at Erg. Theo& Dyn. Sys..

[Bi_1] G. D. Birkhoff, *Dynamical systems,* Amer. Math. Soc. Colloq. Pub.,vol **9**, Amer. Math. Soc. Providence, R. I., (1927).

[Bi_2] G. D. Birkhoff, *Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques,* Memoriae Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei, **93**, 85–216,(1935).

[BC] Ch. Bonatti et S. Crovisier, *Recurrence and genericity,* C. R. Math. Acad. Sci. Paris **336**, 839–844 ,(2003).

[BD_1] Ch. Bonatti and L.J. Díaz, *Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphims,* Ann. Math.,

[BD_1] Ch. Bonatti et L.J. Díaz, *Connexions hétéroclines et généricité d'une infinité de puits ou de sources,* Ann. Sci. École Norm. Sup., **32**, 135–150, (1999).

[BD_2] Ch. Bonatti et L.J. Díaz, *On maximal transitive sets of generic diffeomorphisms,* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **96**, 171–197, (2003).

[BDP] Ch. Bonatti, L.J. Díaz et E.R. Pujals, *A $\mathcal{C}^1$-generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicicity or infinitely many sinks or sources,* Ann. Math. **158**, 355–418, (2003).

[BDV] Ch. Bonatti, L.J. Díaz et M. Viana, *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity*

[BGV] Ch. Bonatti, N. Gourmelon, Th. Vivier, *Perturbations of the derivative along periodic orbits.* Ergodic Theory Dynam. Systems 26 (2006), no. 5, 1307–1337.

[BV] Ch. Bonatti, M. Viana, *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting,* Israel J. of Math. 115 157–193 (2000).

[CM] C. Carballo et C. Morales, *Homoclinic classes and finitude of attractors for vector fields on n-manifolds,* Bull. London Math. Soc., **35**, 85–91 (2003).

[CMP] C. Carballo, C. Morales et M.J. Pacífico, *Homoclinic classes for $\mathcal{C}^1$-generic vector fields,* Ergodic Th. & Dynam. Sys. **23**, 1–13, (2003).

[Ca] M. Carvalho, *Sinaï Ruelle Bowen measures for N-dimensional derived from Anosov diffeomorphisms* Ergodic Th. & Dynam. Sys. **13**, 21–44, (1993)

[Co] C. Conley, *Isolated invariant sets and Morse index,* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **38**, AMS Providence, R.I., (1978).

[Cr] S. Crovisier, *Periodic orbits and chainrecurrent sets of C^1-diffeomorphisms,* preprint.

[DPU] L.J. Díaz, E.R. Pujals, and R. Ures, *Partial hyperbolicity and robust transitivity,* Acta Mathematica, **183**, 1-43, (1999).

[DR] L.J. Díaz and J. Rocha, *Partially hyperbolic and transitive dynamics generated by heteroclinic cycles,* Ergodic Th. and Dyn. Syst., **25**, 25-76, (2001).

[F] J. Franks, *Necessary conditions for stability of diffeomorphisms,* Trans. Amer. Math. Soc., **158**, 301–308, (1971).

[Fu] H. Furstenberg, *Strict ergodicity and transformations of the torus,* Amer. J. of Math., **83**,

[GW] G. Gan et L. Wen, *Heteroclinic cycles and homoclinic closures for generic diffeomorphisms,* prépublication de Peking University.

[Go] N. Gourmelon

[Ha] S. Hayashi, *Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1-stability and Ω-stability conjectures for flows,* Ann. of Math., **145**, 81–137, (1997) et Ann. of Math., **150**, 353–356, (1999).

[HPS] M. Hirsch, C. Pugh, et M. Shub, *Invariant manifolds,* Lecture Notes in Math., **583**, Springer Verlag, (1977).

[Hu] M. Hurley, *Attractors: persistence, and density of their basins,* Trans. Amer. Math. Soc., **269**, 271–247, (1982).

[Ku] Masahiro Kurata *Hyperbolic nonwandering sets without dense periodic points* Nagoya Math. J. **74** (1979), 77–86. .

[Ma$_1$] R. Mañé, *Contributions to the stability conjecture,* Topology, **17**, 386-396, (1978).

[Ma] R. Mañé, *An ergodic closing lemma,* Ann. of Math., **116**, 503-540, (1982).

[Ma$_2$] R. Mañé, *A proof of the C^1 stability conjecture.* Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math. No. 66 (1988), 161–210.

[MP] C. Morales et M. J. Pacífico, *Lyapunov stability of ω-limit sets,* Discrete Contin. Dyn. Syst., **8**, 671–674, (2002).

[N$_1$] S.Newhouse, *Diffeomorphisms with infinitely many sinks,* Topology, **13**, 9–18, (1974).

[N$_3$] S. Newhouse, *The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms,* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **50**, 101–151, (1979).

[Pa] J. Palis, *A note on Ω-stability,* Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., **14**, A.M.S. Providence R. I., (1970).

[PP] J. Palis et C. Pugh, *Fifty problems in dynamical systems,* Lect. Notes in Math., **468**, Springer-Verlag, 345–353, (1975).

[PT] J. Palis and F. Takens, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **35**, (1993).

[Po] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste,* (1899), réédité par Les grands classiques Gauthier-Villars, librairie Blanchard, Paris, (1987).

[Pu] C. Pugh, *The closing lemma,* Amer. J. Math., **89**, 956–1009, (1967).

[PR] C. Pugh et C. Robinson, *The C^1-closing lemma, including Hamiltonians,* Ergod. Th. & Dynam. Sys., **3**, 261–314, (1983).

[PS] Pujals, Enrique R.; Sambarino, Martn *Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms.* Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 3, 961–1023.

[R_2] C. Robinson, *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos,* Study in advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, (1999).

[Sh_1] M. Shub, *Dynamical systems, filtrations and entropy,* Bull. of the Amer. Math. Soc., **80**, 27–41, (1974).

[Sh] M. Shub, *Topological transitive diffeomorphism on T^4*, Lect. Notes in Math., **206**, 39 (1971).

[Sh_2] M. Shub, *Stabilité globale des systèmes dynamiques,* Astérisque, **56**, (1978).

[Si] R.C. Simon, *A 3-dimensional Abraham-Smale example,* Proc. A.M.S., **34**(2), 629-630, (1972).

[Sm] S. Smale, *Differentiable dynamical systems,* Bull. A.M.S., **73**, 747–817, (1967).

[W_1] L. Wen, *A uniform C^1 connecting lemma,* Discrete Cont. Dyn. Syst. **8**, 257–265, (2002).

[W_2] L. Wen, *Homoclinic tangencies and dominated splittings,* Nonlinearity, **15**, 1445–1469, (2002).

[WX] L. Wen et Z. Xia, *C^1-connecting lemmas,* Trans. Amer. Math. Soc., **352**, 5213–5230, (2000).