

GROUPES ET DYNAMIQUES.

CHRISTIAN BONATTI

ABSTRACT. Question: quels groupes agissent fidèlement sur \mathbb{R} ou sur le cercle? Quel est la dynamique des actions de groupes? quelle est l'influence de la régularité (continuité, différentiabilité)?

1. HOMÉOMORPHISMES CROISSANTS DE $[0, 1]$

Les *systèmes dynamiques* les plus simples sont certainement ceux engendrés par un homéomorphisme croissant de \mathbb{R} . Le but de ce chapitre est tout d'abord de familiariser les étudiants à la problématique, à travers cet exemple simple. On y découvrira en particulier l'importance des domaines fondamentaux pour comprendre les classes de conjugaison d'homéomorphismes.

Afin d'amener la notion d'*action de groupe*, on considèrera en fin de chapitre les homéomorphismes qui commutent, et le centralisateur d'un homéomorphisme.

Quelques réflexions sur les problèmes de *conjugaison différentiable* des difféomorphismes et des *centralisateurs C^r* des difféomorphismes concluront ce chapitre.

1.1. homéomorphismes. Un *homéomorphisme* entre deux espaces métriques est une bijection continue dont l'inverse est continu.

Ici nous allons nous intéresser aux homéomorphismes de la droite, du cercle, de l'intervalle. Il y a de ce fait une structure supplémentaire, très liée à topologie, qui vient de l'ordre sur \mathbb{R} (et induit un "ordre cyclique" sur le cercle).

Je vous laisse en exercice cette propriété importante que vous avez déjà certainement rencontrée dans vos études, quand vous avez vu la topologie de \mathbb{R} .

Exercice 1. (1) Une bijection croissante de entre deux intervalles I, J de \mathbb{R} est un homéomorphisme.

(2) Plus généralement, montrez qu'une bijection croissante entre deux fermés de \mathbb{R} est un homéomorphisme.

(3) Montrez à l'aide d'un exemple que cette propriété est fausse si X ou Y n'est pas fermé.

1.2. Limite des orbites. Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un homéomorphisme croissant de l'intervalle.

Pour tout $x \in [0, 1]$ la suite $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite monotone. Elle est croissante si $f(x) > x$ et décroissante si $f(x) < x$, constante si $f(x) = x$. On dit alors que x est un point fixe de f .

La suite $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est l'orbite de x pour f . Les suites $\{f^n(x)\}_{n \geq 0}$ et $\{f^n(x)\}_{n \leq 0}$ sont les orbites positive et négative de x .

Rappelons que toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monotone dans $[0, 1]$ converge (vers sa borne supérieure si elle est croissante, vers sa borne inférieure si elle est décroissante). On note

$$\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(x) \text{ et } \omega(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x).$$

On note $Fix(f)$ l'ensemble des point fixes de f . C'est un compact non vide.

Chaque composante connexe de $[0, 1] \setminus Fix(f)$ est un intervalle ouvert dont l'adhérence I est invariante par f , c'est à dire que I vérifie $f(I) = I$.

Lemme 1.1. *Soit I l'adhérence d'une composante connexe de $[0, 1] \setminus Fix(f)$. Alors tous les points de l'intérieurs de I ont les mêmes α et ω -limites, qui sont chacune l'une des extrémités de I . Plus précisément:*

- si $f(x) > x$ pour $x \in Int(I)$ alors $\alpha(x) = \inf I$ et $\omega(x) = \sup I$
- si $f(x) < x$ pour $x \in Int(I)$ alors $\alpha(x) = \sup I$ et $\omega(x) = \inf I$.

On voit bien que les orbites de f sont complètement décrites par la donnée:

- de l'ensemble des point fixes de f ,
- et du signe de $f - id$ entre les points fixes.

On aimerait être plus précis. et définir le fait que deux homomorphismes ont même dynamique. Cela se fait à l'aide de la notion de *conjugaison*.

1.3. Conjugaison. Soit $f: X \rightarrow X$ un homéomorphisme d'un espace métrique X et Y un autre espace métrique.

Soit $h: Y \rightarrow X$ un homéomorphisme. Alors l'application g définie par $g = h^{-1}fh$ est un homéomorphisme de Y . On dit que g est *le conjugué de f par h* . Nous allons voir que les dynamiques de f et de g sont similaires en beaucoup d'aspects.

Ceci provient de la relation élémentaire suivante:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad g^n = h^{-1}f^n h$$

En d'autres termes, tous les itérés de g sont les conjugués des itérés de f , par le même homéomorphisme fh .

On en déduit que l'image par h d'une orbite de g est exactement une orbite de f : plus précisément, soit y un point de Y et $x = h(y) \in X$ son image par h . Alors

$$g^n(y) = h^{-1}(f^n(x)).$$

Comme h est un homéomorphisme, il préserve également toutes les propriétés d'accumulation des orbites les unes sur les autres. Par exemple, pour tout $x \in X$, on note $\omega(x)$ (ou $\omega(x, f)$) l'ensemble des valeurs d'adhérence de l'orbite positive de x . En formule:

$$\omega(x, f) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{f^n(x), n \geq N\}}.$$

Alors h preserve la notion d' ω -limite:

$$\forall y \in Y, \quad \omega(y, g) = h^{-1}(\omega(x, f))$$

Autre exemple: un point $y \in Y$ est un point fixe de g si et seulement si son image $x = h(y)$ est un point fixe de f .

On dit que deux homéomorphismes ont la même *dynamique topologique* s'ils sont conjugués par un homéomorphisme.

1.4. Conjugaison des homéomorphismes de $[0, 1]$ sans points fixes dans $]0, 1[$. Le lemme suivant donne une idée simple mais fondamentale en Système Dynamiques :

Lemme 1.2. *Soient $f: I \rightarrow I$ et $g: J \rightarrow J$ deux homéomorphismes croissants de deux segments I et J . On suppose que, $f(x) > x$ et $g(y) > y$ pour tous points $x \in \text{Int}(I)$ et $y \in \text{Int}(J)$. En particulier, les seuls points fixes de f et g sont les extrémités des segments I et J , respectivement.*

Soit $x_0 \in \text{int}(I)$ et $y_0 \in \text{int}(J)$. Soit h_0 un homeomorphisme croissant de $[x_0, f(x_0)]$ sur $[y_0, g(y_0)]$. En particulier, on a

$$h(x_0) = y_0 \text{ et } h(f(x_0)) = g(y_0).$$

Alors h_0 se prolonge de façon unique en un homeomorphisme (croissant) $h: I \rightarrow J$ qui conjugue f et g :

$$g = hfh^{-1} \text{ et } h|_{[x_0, f(x_0)]} = h_0.$$

Démonstration : On définit une application \tilde{h} sur l'orbite de x_0 par la formule suivante:

$$\tilde{h}(f^n(x_0)) = g^n(y_0).$$

On remarque que \tilde{h} conjugue les restrictions de f et de g aux orbites de x_0 et y_0 , respectivement. De plus \tilde{h} coïncide avec h_0 aux points x_0 et $f(x_0)$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit alors une application h_n en tout point $z \in [f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)]$ par la formule

$$h_n(z) = g^n(h_0(f^{-n}z)).$$

L'application ainsi définie est un homéomorphisme $h_n: [f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)] \rightarrow [g^n(y_0), g^{n+1}(y_0)]$ qui coïncide avec \tilde{h} aux points $f^n(x_0)$ et $f^{n+1}(x_0)$.

Remarquons que l'union $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n([x_0, f(x_0)])$ est exactement l'intérieur du segment I ; en effet l'orbite de x_0 est une suite monotone qui va d'une extrémité à l'autre du segment I .

On en déduit que les applications h_n se recollent en un homéomorphisme h de l'intérieur de I sur celui de J . On complète h aux extrémités de ces segments, l'image des bornes inférieures et supérieures de I étant les bornes correspondantes de J .

On vérifie que h ainsi construite convient. De plus la formule définissant h_n est nécessairement vérifiée par h , ce qui prouve l'unicité de l'extension h de h_0 . \square

Dans le lemme ci-dessus on a supposé que f et g étaient supérieurs à l'identité, en dehors des extrémités de leurs domaines de définition respectifs. Bien sûr, le même énoncé reste valide si l'on suppose que f et g sont tous deux inférieurs à l'identité (en dehors des extrémités). Mais que se passe-t-il si l'un d'entre eux est supérieur à l'identité mais que l'autre est inférieur à l'identité ?

Dans ce cas un homéomorphisme de conjugaison h devra envoyer la borne inférieure de I sur la borne supérieure de J et la borne supérieure de I sur la borne inférieure de J , car h doit préserver les notions d' α -limite et d' ω -limite. Il faut donc que h inverse l'orientation! Modulo cette petite complication, l'énoncé reste identique:

Corollaire 1.1. Soient $f: I \rightarrow I$ et $g: J \rightarrow J$ deux homéomorphismes croissants de deux segments I et J . On suppose que, $f(x) > x$ et $g(y) < y$ pour tous points $x \in \text{Int}(I)$ et $y \in \text{Int}(J)$.

Soit $x_0 \in \text{int}(I)$ et $y_0 \in \text{int}(J)$. Soit $h_0: [x_0, f(x_0)] \rightarrow [g(y_0), y_0]$ un homeomorphisme décroissant; en particulier on a $h(x_0) = x_0$ et $h(f(x_0)) = g(y_0)$.

Alors h_0 se prolonge de façon unique en un homeomorphisme $h: I \rightarrow J$ qui conjugue f et g .

Remarque 1. Sous les hypothèses du lemme, l'homéomorphisme h de conjugaison préserve l'orientation si $f(x) \geq x$ et $g(y) \geq y$, ou si $f(x) \leq x$ et $g(y) \leq y$.

Par contre, l'homéomorphisme h inverse l'orientation si $f(x) \geq x$ et $g(y) \leq y$, ou si $f(x) \leq x$ et $g(y) \geq y$.

La clé de la démonstration du Lemme 1.2 est la remarque suivante:

Remarque 2. Sous les hypothèses du lemme, chaque orbite de l'intérieur de I rencontre $[X, f(x)[$ exactement en un point.

Un tel intervalle $[x, f(x)[$ est appelé un *Domaine fondamental* de f . Par abus de langage, on appelle aussi l'intervalle fermé $[x, f(x)]$ un domaine fondamental, bien que l'orbite de x rencontre ce segment en deux points.

Remarque 3. (1) L'énoncé du Lemme 1.2 parle de l'unicité de l'homéomorphisme de conjugaison h qui étend h_0 . L'homéomorphisme de conjugaison entre f et g n'est par contre pas unique, puisque tout choix de l'homéomorphisme h_0 détermine un autre choix de l'homéomorphisme h !

(2) Par contre, si h_1 et h_2 sont deux homéomorphismes qui conjuguent f à g , alors $h_2^{-1}h_1$ est un homéomorphisme qui conjugue f à lui même. Autrement dit l'homéomorphisme $g = h_2^{-1}h_1$ commute avec f , c'est à dire $fg = gf$. Cette idée sera reprise en détail quelques sections plus bas.

Exercice 2. Notons $T_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la translation $x \mapsto x + \alpha$ et $h_\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'homothétie $x \mapsto \beta \cdot x$ de rapport β .

Montrez que pour tout $\alpha \neq 0$ et pour tout $\beta > 0$ tel que $\beta \neq 1$, la restriction de h_β à $]0, +\infty[$ est conjuguée à T_α .

Dire pour quelles valeurs de α et β les homéomorphismes de conjugaison sont croissants.

1.5. Classes de conjugaison des homéomorphismes de $[0, 1]$. Nous pouvons à présent formaliser l'idée intuitive qui dit que la dynamique d'un homéomorphisme de l'intervalle est déterminé par l'ensemble des points fixes, et la direction "vers la droite ou vers la gauche" de la dynamique entre les points fixes successifs:

Théorème 1. Soient f et g deux homéomorphismes croissants de $[0, 1]$. On suppose qu'il existe un homéomorphisme croissant h_0 de $\text{Fix}(f)$ sur $\text{Fix}(g)$.

Alors, h_0 se prolonge en un homéomorphisme $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ conjugant f et g si et seulement si, pour tout $x_1, x_2 \in \text{Fix}f$ on a:

$$(\forall z \in]x_1, x_2[, \quad f(z) > z) \iff (\forall y \in]h_0(x_1), h_0(x_2)[, \quad g(z) > z).$$

Démonstration : Le lemme permet de construire un homéomorphisme croissant de chaque composante connexe $]x_1, x_3[$ de $[0, 1] \setminus \text{Fix}f$ sur $]h_0(x_1), h_0(x_2)[$ qui conjugue les restrictions respectives de f et g à ces intervalles. L'union de ces homéomorphismes, et de h_0 , est une bijection croissante, donc un homéomorphisme. \square

- Exercice 3.** (1) Montrez que, pour tout $n > 0$ et tout $f \in \text{Homeo}_+([0, 1])$, f et f^n sont conjugués par un homéomorphisme croissant.
 (2) Montrez sur un exemple qu'il existe un homéomorphisme $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tel que f et f^{-n} ne sont pas conjugués.
 (3) Donnez un exemple où f et f^{-1} sont conjugués par un homéomorphisme croissant.
 (4) Supposons que $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est un homéomorphisme tel que f et f^{-1} sont conjugués par un homéomorphisme croissant. Que peut-on dire sur le cardinal de $\text{Fix}f$?

1.6. Homéomorphismes qui commutent. On dit que f et g commutent si $fg = gf$.

Remarque 4. On peut ré-écrire la relation de commutation comme $f = gfg^{-1}$. Autrement dit g conjugue f avec lui-même.

De même, f conjugue g à g .

On en déduit:

- L'image par f d'une orbite de g est donc une orbite de g .
- En particulier si x est un point fixe de g alors $f(x)$ est un point fixe de g .
- De même, l'image par g d'un point fixe de f est un point fixe de f .

Autrement dit

$$f(\text{Fix}g) = \text{Fix}g \text{ et } g(\text{Fix}f) = \text{Fix}f.$$

Les homéomorphismes qui commutent avec f préservent toute la dynamique topologique de f . Il est naturel de se demander s'il existe beaucoup de tels homéomorphismes.

Voici un premier exemple trop élémentaire:

Exemple 1. Pour tout homéomorphisme h d'un espace métrique, on appelle support de h et on note $\text{supp}(h)$ l'adhérence de l'ensemble des points x tels que $h(x) \neq x$. Autrement dit

$$\text{supp}(h) = X \setminus \text{Int}(\text{Fix}(h)).$$

Si f et g sont deux homéomorphismes de supports disjoints alors ils commutent :

$$\text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset \implies fg = gf$$

Exercice 4. Notons $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $x \mapsto x + \sin x$.

- Montrez que f est un homéomorphisme de \mathbb{R} .
- Montrez qu'il commute avec la translation $T_{2\pi}$.
- Déterminez $\text{Fix}(f)$
- Quelles sont les valeurs de α telles que T_α commute avec f ?

1.7. Centralisateur. Le centralisateur $C_0(f)$ d'un homéomorphisme est l'ensemble des homeomorphisme qui commute avec lui.

Remarque 5. (1) *Le centralisateur $C_0(f)$ un sous groupe de $Homeo([0, 1])$: en effet*

- *si $g, h \in C_0(f)$ alors $fgh = gfh = ghf$ ce qui montre que $gh \in C_0(f)$.*
- *si $g \in C_0(f)$ alors $g^{-1} \in C_0(f)$ ($gf = fg \iff fg^{-1} = g^{-1}f$).*

(2) *De plus $C_0(f)$ contient le groupe $\langle f \rangle = \{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ engendré par f .*
On dit que $C_0(f)$ est trivial si $C_0(f) = \langle f \rangle$.

Corollaire 1.2. *Le centralisateur d'un homeomorphisme de $[0, 1]$ n'est jamais trivial.*

Démonstration : Si $Fix(f)$ est d'intérieur non vide alors il contient un intervalle ouver $I \neq \emptyset$. D'après l'exemple 1, tout homéomorphisme à support dans I commute avec f , et n'appartient pas à $\langle f \rangle$.

Considérons à présent un point x tel que $f(x) \neq x$. Supposons $f(x) > x$ pour fixer les idées (le cas $f(x) < x$ se traite de façon identique). Notons $a = \alpha(x, f)$ et $b = \omega(x, f)$ les limites des orbites positives et négative de x . Le Lemme 1.2 implique que tout homéomorphisme g_0 de $[x, f(x)]$ fixant x et $f(x)$ se prolonge en un homéomorphisme g_1 de $[a, b]$ preservant l'orientation et commutant avec f . Comme $g_1(a) = a$ et $g_1(b) = b$, on peut prolonger g_1 en un homéomorphisme g de $[0, 1]$ égal à l'identité hors de $[a, b]$ et coincidant avec g_1 sur $[a, b]$. On en déduit que g est un homéomorphisme de $[0, 1]$ qui commute avec f .

Finalement, si l'on a choisit g_0 différent de l'identité, alors g admet x et $f(x)$ comme points fixes mais est different de l'identité: on en déduit que g n'est pas une puissance de f , donc $g \notin \langle f \rangle$. \square

La preuve du corollaire à montré beaucoup plus que ce qui était annoncé: en effet nous avons vu que pour tout $f \in Homeo_+([0, 1])$ il existe un intervalle ouvert non vide I tel que tout homéomorphisme g_0 à support dans I se prolonge en un homéomorphisme qui commute avec f . Ce prouve que le centralisateur de f est un très gros groupe: en particulier:

Exercice 5. *Montrer que le centralisateur n'est jamais commutatif: pour tout homéomorphisme croissant f de $[0, 1]$ il existe g, h qui commutent avec f mais ne commutent pas entre eux.*

Indication: *choisir un domaine fondamental I de f . Choisir deux homéomorphismes h_0 et g_0 de I tels que $h_0(Fix(g_0)) \neq Fix(g_0)$. Notez $h, g \in C^0(f)$ les uniques extension de h_0 et g_0 qui commutent avec f . Montrez que g et h ne commutent pas.*

1.8. Difféomorphismes. Une application $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est un *difféomorphisme de classe C^r* , $r \geq 1$ si f est de classe C^r , f est bijective et f^{-1} est de classe C^r .

Remarque 6. *Pour qu'un homéomorphisme $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ soit un difféomorphisme, il suffit que f soit de classe C^r et que sa différentielle Df ne s'annule pas:*

$$\forall x \in [0, 1], Df(x) \neq 0.$$

Quand on considère des difféomorphismes de classe C^r qui sont conjugués, il semblerait naturel de demander que la conjugaison soit aussi de classe C^r . De même il est naturel de considérer le centralisateur $C_r(f)$.

Ce centralisateur $C_r(f)$ fait encore l'objet de recherches: j'ai vu récemment passer un article, pas encore publié, qui cherche à exhiber un exemple de difféomorphisme f du cercle S^1 où $C_r(f)$ est un sous-groupe dense de \mathbb{R} mais n'est pas \mathbb{R} .

Il existe des difféomorphismes C^r dont le centralisateur C^1 est trivial. L'exploration de ce sujet est l'un des thèmes possibles de ce cours, et aussi un thème de recherche possible après ce cours.

Aujourd'hui, dans ce chapitre d'introduction, je ne veux dire que des choses faciles. Voici une simple observation qui illustre la rigidité du centralisateur $C_r(f)$ pour $r > 1$.

Proposition 1.1. *Fixons $a > 1$ et soit $f: [0, +\infty \rightarrow [0, +\infty[$ l'homothétie $x \mapsto ax$ (c'est un difféomorphisme). Soit $g: [0, +\infty \rightarrow [0, +\infty[$ un homéomorphisme. On suppose que*

- g commute avec f ;
- g est dérivable en 0.

Alors g est une homothétie.

Démonstration : On remarque que, pour tout $x > 0$, si $g(x) = y$ alors $g(\alpha^n x) = \alpha^n y$. Notons $x_i = \alpha^i x$. On a donc $\frac{g(x_i)}{x_i} = \frac{y}{x}$. Pour $i \rightarrow -\infty$ on a $x_i \rightarrow 0$. Donc

$$\lim_{i \rightarrow -\infty} \frac{g(x_i)}{x_i} = Dg(0).$$

On a montré

$$\frac{g(x)}{x} = Dg(0), \text{ pour tout } x > 0.$$

Donc g est l'homothétie de rapport $Dg(0)$ ce qui conclut. \square

Exercice 6. *Soient f et g deux difféomorphismes croissants de $[0, 1]$, et x un point fixe de f . On suppose que g est conjugué à f par un difféomorphisme h . Montrer que $y = h(x)$ est un point fixe de g tel que $Df(x) = Dg(y)$.*

En déduire que, si $f \in \text{Diff}_+^1([0, 1])$ possède un point fixe x tel que $Df(x) > 1$, alors pour tout $n > 1$, f n'est pas différemment conjugué à f^n .

Indication: *On raisonne par l'absurde, en supposant que g est un difféomorphisme conjugué à f à f^n , $n > 1$.*

- Montrez qu'il existe un point x_0 qui réalise le maximum de $Df(x)$ pour $x \in \text{Fix}(f)$.
- Calculez $Df^n(x_0)$ et montrez $Df^n(x_0) > Df(x_0)$.
- Soit $y_0 = g^{-1}(x_0)$. Montrez que y_0 est un point fixe de f .
- Calculez $Df(y_0)$. Montrez $Df(y_0) > Df(x_0)$. En déduisez la contradiction qui conclut.

2. VOCABULAIRE DES ACTIONS DE GROUPES

2.1. action de groupes: définitions. Soit X un ensemble. On note $\text{Bij}(X)$ l'ensemble des bijections de X . La loi de composition induit une structure de groupe sur $\text{Bij}(X)$. Soit G un groupe, dont la loi est noté multiplicativement. Je noterai 1_G ou G l'élément neutre de G .

Une *action de G sur X* est une application

$$\Phi : G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g(x)$$

telle que $1_G(x) = x$ pour tout x , et $(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2(x))$ pour tout $g_1, g_2 \in G$ et tout point $x \in X$.

Remarque 7. (1) Si Φ est une action de G sur X alors, pour tout $g \in G$ l'application $\varphi(g) : X \rightarrow X, x \mapsto g(x)$ est une bijection de X , et l'application qui à g associe cette bijection $\varphi(g)$ est un morphisme de G dans le groupe des bijections $\text{Bij}(X)$.

(2) Réciproquement, si $\varphi : G \rightarrow \text{Bij}(X)$ est un morphisme de groupe, alors l'application $G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g(x) = (\varphi(g))(x)$ est une action de G sur X .

En d'autres termes, la donnée d'une action du groupe G sur X est équivalente à la donnée d'un homomorphisme φ du groupe G sur le groupe des bijections de X . On notera $g(x) = \varphi(g)(x)$.

On dit qu'une action de G sur X , associée à un morphisme est *fidèle* si φ est injective: autrement dit pour tout $g \neq 1$ il existe $x \in X$ tel que $g.x \neq x$.

Exemple 2. (1) si $G \subset \text{Bij}(X)$ est un sous-groupe de X alors l'action naturelle de G sur X est celle induite par le morphisme d'inclusion de G dans $\text{Bij}(X)$.

(2) toute bijection f de X induit une action de \mathbb{Z} . Cette action est fidèle sauf si f est périodique (i.e. il existe $n > 0$ tel que $f^n = \text{id}_X$). Elle induit alors une action libre de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(3) Plus généralement, si $\varphi : G \rightarrow \text{Bij}(X)$ est une action, elle induit une action libre de $G/\text{Ker}\varphi$.

(4) Si f et g sont deux bijections de X qui commutent, elles induisent une action de \mathbb{Z}^2 sur X .

(5) si G est un groupe, l'application $G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto g \cdot h$ est une action de G sur G (par multiplication à gauche).

Exercice 7. Soit $\varphi_{\alpha, \beta}$ le morphisme de \mathbb{Z}^2 dans le groupe de translation de \mathbb{R} défini par $\varphi_{\alpha, \beta}(n, m) = t_{n\alpha + m\beta} : x \mapsto x + n\alpha + m\beta$.

A quelle condition l'action engendrée par $\varphi_{\alpha, \beta}$ est-elle fidèle?

Le stabilisateur de x est l'ensemble de $g \in G$ tels que $g(x) = x$.

Remarque 8. (1) Le stabilisateur de x est un sous-groupe de G .

(2) Le stabilisateur du point $g(x)$ est le conjugué par g du stabilisateur du point x . En formule cela donne:

$$\text{Stab}(g(x)) = g\text{Stab}(x)g^{-1}$$

On dit qu'une action est *libre* si, pour tout x , le stabilisateur de x est $\varphi(1_G)$. Autrement dit, pour tout $g \neq 1_G$ la bijection $\varphi(g)$ n'a pas de point fixe.

Exercice 8. Montrez que si G est un groupe, alors l'action de G sur G par multiplication à gauche est une action libre.

Exercice 9. Soit G un groupe et $\varphi: G \rightarrow (\text{Bij})(G)$ défini par $\varphi(g): h \rightarrow ghg^{-1}$.

- (1) Montrez que φ induit un homomorphisme de G dans $\text{Hom}(G)$ et donc une action de G sur G dite par conjugaison.
- (2) A quelle condition sur G cette action est-elle fidèle?
- (3) Montrez que cette action n'est jamais libre.

2.2. Action sur un espace topologique. Si X est un espace topologique, on parle d'action de groupe *continue* si $\varphi(G) \subset \text{Homeo}(X)$, c'est à dire si pour tout $g \in G$ la bijection $x \mapsto g(x)$ est un homéomorphisme de X .

Si X est une variété différentiable de classe C^r , on parle d'action *de classe C^r* si $\varphi(G) \subset \text{Diff}^r(X)$.

Le but de ce cours est de comprendre quels groupes agissent fidèlement, continûment ou différentiablement sur la droite \mathbb{R} , le cercle S^1 , le segment $[0, 1]$ ou l'intervalle semi ouvert $[0, +\infty[$.

2.3. Orbites, ensembles invariants, ensembles minimaux. Pour tout $x \in X$ on appelle orbite de x et on note $G.x$ l'ensemble des images de x par l'action des éléments de G :

$$G.x = \{g(x), g \in G\}.$$

On dit qu'une partie $Y \subset X$ est invariante sous l'action de G si, pour tout $x \in Y$, l'orbite $G.x$ est contenue dans Y .

Remarque 9. Si G est une action continue et si Y est un ensemble invariant, alors l'adhérence \overline{Y} et l'intérieur $\text{Int}(Y)$ sont invariants.

Soit $G \times X \rightarrow X$ une action continue, et Y une partie de X . On dit que Y est un *minimal* pour l'action de G si:

- Y est fermé
- Y est invariant par l'action de G
- Les orbites des points de Y sont denses dans Y : pour tout $x \in Y$ on a $\overline{G.x} = Y$.

Lemme 2.1. X espace métrique compact. Toute action continue $G \times X \rightarrow X$ admet un compact minimal invariant. Plus précisément l'adhérence de toute orbite contient un minimal.

Démonstration : On considère l'ensemble \mathcal{K}_x des compacts invariants contenus dans $\overline{G.x}$, muni de la relation d'ordre \subset . Alors (\mathcal{K}_x, \subset) est inductif: toute famille $\{K_i\}_{i \in \mathcal{E}}$ totalement ordonnée admet un minorant $\bigcap_{i \in \mathcal{E}} K_i$. Le Lemme de Zorn assure alors que \mathcal{K}_x contient un élément minimal K . Si $y \in K$ alors $\overline{G.y} \subset K$ est un compact invariant plus petit que K donc égal à K . Donc K est un minimal pour l'action de G .

□

Remarque 10. *Attention! Il existe des actions par difféomorphismes sur \mathbb{R} qui sont sans minimal. On en construira dans le chapitre sur les minimaux (Voir la Section 7.3).*

Une action de G sur X est dite *minimale* si X est un minimal (il est alors le seul minimal). Autrement dit toute orbite de G est dense dans X .

2.4. Action conjuguées. Si X et Y sont deux espace topologiques et que $h: X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors l'application $\psi_h: f \mapsto hfh^{-1}$ induit un isomorphisme de $Homeo(X)$ sur $Homeo(Y)$.

Alors pour tout groupe G , à toute action de G sur X engendré par un morphisme $\varphi: G \rightarrow Homeo(X)$ on associe naturellement une action de G sur Y engendrée par $\psi_h \circ \varphi$.

On dit que ces deux actions sont *conjuguées*.

Comme précédemment, h envoie orbite sur orbite $h(orb(x)) = orb(h(x))$. L'image d'un minimal est un minimal, le stabilisateur de x et de $h(x)$ sont les memes, etc...

3. EXEMPLES CLASSIQUES

3.1. La droite et le cercle. Cette année je vais considérer des actions de groupes en dimension 1, donc sur les deux variétés connexes, à base dénombrable¹, de dimension 1: la droite réelle \mathbb{R} et le cercle S^1 .

On note $Homeo(\mathbb{R})$, $Homeo_+(\mathbb{R})$, $Homeo(S^1)$, $Homeo_+(S^1)$, $Diff^r(\mathbb{R})$, $Diff_+^r(\mathbb{R})$, $Diff^r(S^1)$, $Diff_+^r(S^1)$ les ensembles d'homeomorphismes, difféomorphismes de classe C^r préservant ou pas l'orientation.

On considèrera également les homéomorphismes et difféomorphismes du segment $[0, 1]$, ou de la demi-droite $[0, 1[$.

3.2. Le cercle: plusieurs modèles. Le cercle S^1 peut être vu de beaucoup de façon:

- c'est le cercle unité de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{C} .
- C'est le quotient de \mathbb{R} par la relation d'équivalence $x \simeq x + 1$. On passe de l'une à l'autre de ces interprétations par

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \subset \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{2i\pi t}. \end{aligned}$$

C'est une application qui est localement un homéomorphisme. Cependant les points de S^1 on plusieurs préimages. Plus précisément deux points ont la même image si et seulement s'ils diffèrent d'un entier.

Cette application induit donc une bijection continue de \mathbb{R}/\mathbb{Z} sur S^1 , c'est donc un homéomorphisme.

La projection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} est un revêtement: La droite est donc *le revêtement universel* du cercle.

Ceci définit aussi la structure différentiable du cercle: en effet une application $\varphi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable si $\varphi \circ \pi$ est dérivable.

¹pour ceux que cela intéresse, il existe aussi une variété de dimension 1 qui n'est pas à base dénombrable, et qu'on appelle *la grande droite*

- C'est le quotient de $[0, 1]$ par l'identification de 0 avec 1. Cette identification est un espace métrique: $d(t_1, t_2) = \inf\{|t_2 - t_1|, t_1 + 1 - t_2, t_2 + 1 - t_1\}$. La projection π de \mathbb{R} sur S^1 , en restriction à $[0, 1]$, induit une bijection continue de $[0, 1]/0 \simeq 1$ sur S^1 , donc un homéomorphisme.
- C'est aussi la compactification de \mathbb{R} par 1 point à l'infini. En effet, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}$ est le quotient par \mathbb{Z} de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, donc d'une union disjointe des intervalles $]n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$. C'est donc le quotient de $]0, 1[\times \mathbb{Z}$ par \mathbb{Z} . Finalement, ce quotient est $]0, 1[$.
Cependant l'application $t \mapsto \tan(\pi t)$ est un difféomorphisme de $]0, 1[$ sur \mathbb{R} .
Donc S^1 privé d'un point est l'intervalle ouvert donc est \mathbb{R} .
- C'est aussi \mathbb{RP}^1 , l'espace des droites de \mathbb{R}^2 . Comment voir cela?:
A toute droite D de \mathbb{R}^2 on associe $\frac{1}{2\pi} \angle(D, D_0)$, où $\angle(D, D_0)$ est l'angle que fait D avec l'axe de x . Cet angle est bien déterminé *modulo* π : les droite associées à l'angle α ou à l'angle $\alpha + \pi$ sont égale.
Ceci définit un homéomorphisme de l'espace des droites de \mathbb{R}^2 (appelé *espace projectif de dimension 1* et noté \mathbb{RP}^1) sur S^1 .
- (juste pour achever de vous troubler complètement!) c'est aussi l'espace des demi-droite de \mathbb{R}^2 : en effet une demi droite de \mathbb{R}^2 est de la forme $]0, +\infty[.e^{2i\pi t}$. Une autre faon de dire les chose est de voir que toute demi droite coupe le cercle unite en un et un seul point: l'application qui à toute demi-droite associe son point d'intersection avec le cercle est l'homéomorphisme annoncé.

3.3. Exemples sur la droite.

- (1) Le groupe des translations de \mathbb{R} : $x \mapsto \tau_\alpha(x) = x + \alpha$.
- (2) Le groupe des homothéties de \mathbb{R} : $x \mapsto h_\alpha(x) = \alpha \cdot x$ pour $\alpha \neq 0$.
Ces deux groupes sont respectivement isomorphes à $(\mathbb{R}, +)$ et (\mathbb{R}^*, \cdot) . En particulier ce sont des groupes abéliens.
- (3) Le groupe affine $A(1, \mathbb{R})$ des applications affines de la droite réelle, de la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$. Remarquez qu'il est engendré par les homothéties et par les translations.
On a de plus la relation $h_\alpha \tau_\beta h_\alpha^{-1} = \tau_{\alpha\beta}$. En effet $x \mapsto \alpha(\alpha^{-1}x + \beta) = x + \alpha\beta$.

Proposition 3.1. *Montrez qu'un sous-groupe G du groupe des translations est ou-bien monogène (c'est à dire, engendré par une unique translation) ou bien toutes les orbites sont denses dans \mathbb{R} .*

Démonstration : Cela vient de la propriété classique suivante:

Lemme 3.1. *Tout sous groupe G de $\mathbb{R}, +$ est ou bien monogène, ou bien dense dans \mathbb{R} .*

Pour prouver le lemme on considère $a = \inf G \cap]0, +\infty[$

- Si $a = 0$ alors il existe des éléments x_ε dans G dans $]0, \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. Pour tout ouvert U de \mathbb{R} on choisit ε et $x \in U$ tel que $[x, x + \varepsilon] \subset U$. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $nx_\varepsilon \in [x, x + \varepsilon]$ ce qui montre que $G \cap U \neq \emptyset$.
- Si $a > 0$ alors $]a, 2, a[$ ne contient pas d'élément y de G sinon G contiendrait des élément aussi proche que l'on veut de $y - a < a$, ce qui contredirait la définition de a . Donc $a \in G$ et $G = \mathbb{Z}a$.

On conclut la démonstration de la proposition: si G n'est pas monogène, il est dense dans \mathbb{R} et alors pour tout x l'orbite de x par les translation $T_\alpha, \alpha \in G$ est l'ensemble des

points $x + \alpha, \alpha \in G$. C'est donc l'image de G par la translation T_x . Comme G est dense dans \mathbb{R} , l'orbite de x aussi. \square

3.4. Le groupe affine. Le but de cette section est de résoudre le problème suivant:

Problème 1. *Déterminer tous les sous-groupes de $A_+(\mathbb{R}, 1)$ dont l'action ne soit pas minimale (toute orbite dense)*

Voici des indications pour ce problème.

Soit $f: x \mapsto ax + b$. Alors pour toute translation T_α la conjuguée $fT_\alpha f^{-1}$ est la translation $T_{a\alpha}$.

Soit $f: x \mapsto ax + b$ et $g: cx + d$ tels que $a \neq 1, c \neq 1$. Alors $fgf^{-1}g^{-1}$ est une translation de vecteur $u = b - d + da - bc$. f et g ont chacune un unique point fixe $\frac{b}{1-a}$ et $\frac{d}{1-c}$. Alors $Fixf \neq Fixg$ est équivalent à $u \neq 0$.

Soit G un sous groupe de $A(\mathbb{R}, 1)$.

- Si G contient une translation T_α et une application affine $f \mapsto ax + b$ avec $|a| \neq 1$, alors G contient des translations de pas arbitrairement petits: l'action est donc minimale.
- Si G contient deux applications affines $f: x \mapsto ax + b$ et $g: cx + d$ telles que $|a| \neq 1, c \neq 1$ et telles que $fix(f) \neq fix(g)$. Alors G contient aussi une translation, et l'action est minimale.
- Donc, si l'action de G n'est pas minimale et que G contient $f: x \mapsto ax + b$ avec $|a| \neq 1$, alors $fix(f)$ est un point fixe commun à tous les éléments de G : G est donc conjugué, par une translation, à un groupe d'homothétie. Il est discret si et seulement si ce groupe d'homothéties est monogène (cas où $G \subset Aff_+(\mathbb{R})$), ou est le produit d'un groupe monogène par un élément d'ordre 2 (la symétrie $x \mapsto -x$).
- Si l'action est minimale et si G ne contient pas de $f: x \mapsto ax + b$ avec $|a| \neq 1$. Si $G \subset Aff_+(\mathbb{R})$ c'est alors un groupe de translation, il n'est pas minimale si et seulement si il est monogène. Dans l'autre cas, G est ou bien engendré juste par une symétrie (conjuguée à $x \mapsto -x$), ou par cette symétrie et une translation.

Exercice 10. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ trouvez une action fidèle du groupe $\langle a, b | aba^{-1} = b^n \rangle$.*

3.5. Exemples sur le cercle.

3.5.1. Dynamiques des rotations. On considère le cercle comme étant \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Les translations $x \mapsto x + \alpha$ passent au quotient sur cercle en des rotations (c'est la rotation usuelle $e^{2i\pi x} \mapsto e^{2i\pi x + \alpha}$ d'angle $2\pi\alpha$).

Si $\alpha = \frac{p}{q}$ appartient à \mathbb{Q} alors toute orbite est périodique de période q . Si α est irrationnel, alors toute orbite est dense.

Comme dans le cas des translations sur \mathbb{R} une action par rotation qui n'est pas minimale est monogène, et est engendrée par une rotation rationnelle.

3.5.2. Actions venant des actions sur \mathbb{R} . Tout homéomorphisme de \mathbb{R} peut être complété en un difféomorphisme de $S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par un point fixe à l'infini.

Plus précisément: le cercle moins un point p est homéomorphe à \mathbb{R} . Fixons un homéomorphisme $h: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \setminus \{p\}$. Alors à toute action φ de G sur \mathbb{R} on associe l'action

conjuguée $\psi_h \circ \varphi$ sur $S^1 \setminus p$. Cette action se complète en une action sur S^1 en posant p comme point fixe global.

L'action obtenue ne dépend pas, à conjugaison près, du choix de p ni du choix de h .

Les groupes d'homothétie, translation, et $A(\mathbb{R}, 1)$ agissent donc de façon fidèle sur S^1 .

3.5.3. l'action naturelle de $PGL(2, \mathbb{R})$ et $PSL(2, \mathbb{R})$. Le groupe $GL(2, \mathbb{R})$ des matrices inversibles agit sur \mathbb{RP}^1 : l'image d'une droite est une droite.

Cette action n'est pas fidèle: les homothéties agissent trivialement. Le quotient $GL(2, \mathbb{R})$ par les homothéties est le groupe $PGL(2, \mathbb{R})$.

Lemme 3.2. *Il agit fidèlement sur S^1 .*

Démonstration : Une application linéaire de \mathbb{R}^2 qui fixe 3 droites est une homothétie.

□

Remarque 11. *Les points fixes de l'action de $f \in PGL(2, \mathbb{R})$ correspondent aux directions propres de tout représentant $\tilde{f} \in GL(2, \mathbb{R})$ de f . En conséquence, tout élément de $PGL(2, \mathbb{R})$ admet 0, 1 ou deux points fixes sur S^1 .*

Exercice 11. *Montrer que le stabilisateur de tout point est isomorphe à $A(\mathbb{R}, 1)$.*

On considère aussi l'action de $GL(2, \mathbb{R})$ sur le cercle des demi-droites.

3.6. Action de $Aff(\mathbb{R})$ sur le compactification de \mathbb{R} et l'action de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur S^1 . La compactification $S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ correspond à une carte de \mathbb{RP}^1 : Dans \mathbb{R}^2 toute droite vectorielle coupe la droite affine verticale $x = 1$ en un et un seul point, et on complète par la droite vectorielle verticale, correspondant au "point à l'infini".

$(x, y) \mapsto (x, \alpha y + \beta x)$ soit les matrices $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

L'action du groupe affine sur le compactifié de \mathbb{R} par un point, n'est autre que celle de ce sous groupe de $PGL(2, \mathbb{R})$.

3.7. Relevé d'un homéomorphisme du cercle. Soit f un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation. On appelle relevé de f sur \mathbb{R} tout homéomorphisme $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui passe au quotient en f sur S^1 plus précisément, soit π la projection de \mathbb{R} sur S^1 . On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} & & \\ \pi \downarrow & & \downarrow & \pi & \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 & & \end{array}$$

Lemme 3.3. *Pour tout homéomorphisme f de S^1 , il existe un relevé F de f sur \mathbb{R} .*

Si F et G sont deux relevés de f alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $G(x) = F(x) + n$, pour tout x .

- Si f préserve l'orientation, alors F vérifie $F(x + 1) = f(x) + 1$.
- Si f inverse l'orientation alors F vérifie $F(x + 1) = F(x) - 1$.

Démonstration : On choisit un point x de S^1 et son image y . On considère les segments $[x, x + 1]$ et $[y, y + 1]$. L'homéomorphisme f induit un homéomorphisme de ces deux intervalles et la question est si l'image de x est y ou $y + 1$. \square

On note $\widetilde{Homeo}_+(S^1)$ le groupe d'homéomorphisme de \mathbb{R} qui commutent avec $x \mapsto x+1$.

3.8. Construction d'un groupe de difféomorphisme de S^1 . Le but de cette partie est d'illustrer les relations entre \mathbb{R} et S^1 en explicitant une construction de groupe de difféomorphisme de S^1 dont on contrôle l'ensemble des points fixes.

On note $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ l'ensemble des relevés sur \mathbb{R} des éléments de $PSL(2, \mathbb{R}) \subset Homeo_+(S^1)$.

Exercice 12. On se fixe un entier $k > 0$. Étant donné $F \in Homeo_+(S^1)$ on note $F_k = h_{\frac{1}{k}} F h_k$, et on considère l'application ψ définie par: $\psi_k(F) = F_k$.

- (1) montrez que ψ_k est un isomorphisme du groupe $Homeo_+(\mathbb{R})$.
 - (2) montrez que si $F \in \widetilde{Homeo}_+(S^1)$ (c'est à dire que F commute avec la translation T_1) alors F_k commute avec la translation $T_{\frac{1}{k}}$. En déduire que F_k commute aussi avec la translation T_1 . En conséquence $F_k \in \widetilde{Homeo}_+(S^1)$.
- Est-ce que ψ_k induit un isomorphisme de $\widetilde{Homeo}_+(S^1)$?*
- (3) montrez que l'image de ψ_k est l'ensemble des homéomorphismes qui commutent avec la translation $x \mapsto x + \frac{1}{k}$.
 - (4) On note $PSL_k(2, \mathbb{R})$ l'ensemble des projetés sur S^1 de $\psi_k(\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}))$.

Montrez que le cardinal de l'ensemble des points fixes des éléments de $PSL_k(2, \mathbb{R})$ est toujours un multiple de k et qu'il est inférieur à $2k$.

4. GROUPES AGISSANT SANS POINTS FIXES: LE THÉORÈME DE HOLDER

Rappelons que si f est un homéomorphisme de \mathbb{R} sans point fixe, alors f est conjugué à la translation $x \mapsto x + 1$. Nous allons considérer à présent un groupe qui agit librement sur \mathbb{R} . Chacun de ses éléments sont donc individuellement conjugués à des translations. La questions qui nous occupe est de savoir si on peut conjuguer à des translations simultanément tous les éléments de cette action.

Le but de ce chapitre est de montrer le théorème de Hölder:

Théorème 2. *Soit $G \subset \text{Homeo}(\mathbb{R})$ un groupe d'homéomorphisme tels que tout élément de G différent de l'identité n'a aucun point fixe.*

Alors G est un groupe abélien, ordonné, archimédien.

De plus il existe un morphisme injectif $t: G \rightarrow \mathbb{R}$ et une application continue croissante h de \mathbb{R} telle que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{x \mapsto gx} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{x \mapsto x+t(g)} & \mathbb{R} \end{array}$$

4.1. Un groupe ordonné archimédien. Notons $f \prec g$ si $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < g(x)$

Lemme 4.1. *La relation $f \prec g$ définit une relation d'ordre total sur G . De plus elle est invariante par multiplication à droite et à gauche par les éléments de G .*

Enfin, l'ordre \prec est archimédien.

Démonstration :

Affirmation 1. *Tous les éléments de G préservent l'orientation.*

Démonstration : Sinon pour $x \rightarrow -\infty$ $f(x) \rightarrow +\infty$ en particulier $f(x) - x > 0$ et pour $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \rightarrow -\infty$ donc $f(x) - x < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires implique qu'il existe x avec $f(x) = x$. L'hypothèse implique $f = id$ ce qui contredit que f inverse l'orientation. \square

Affirmation 2. *S'il existe x_0 tel que $f(x_0) < g(x_0)$ alors pour tout x $f(x) < g(x)$.*

Démonstration : Sinon, par le théorème des valeurs intermédiaires il existe x_1 tel que $f(x_1) = g(x_1)$. Donc $g^{-1}f(x_1) = x_1$. L'hypothèse implique $g^{-1}f = id$ donc $g = f$ contredisant $f(x) < g(x)$. \square

Affirmation 3. *\prec est un ordre total.*

Démonstration : Si $f \prec g$ et $g \prec h$ alors pour tout x $f(x) < g(x) < h(x)$. Cela prouve la transitivité de \prec . L'antisymétrie est désormais claire. C'est donc une relation d'ordre (stricte)

De plus pour tout f, g $f(0) < g(0)$ (alors $f \prec g$ ou $f(0) > g(0)$ donc $f \succ g$ ou $f(0) = g(0)$ alors $f = g$). L'ordre \prec est donc total. \square

Affirmation 4. *Pour tout f, g, h on a*

$$f \prec g \Rightarrow (hf \prec hg \text{ et } fh \prec gh).$$

Démonstration : Si $f(x) < g(x)$ alors $hf(x) < hg(x)$ car h preserve l'orientation. Si $f(x) < g(x)$ alors ceci vaut en tout point x . En particulier en $h(x)$. Donc $f(h(x)) < g(h(x))$.

La relation d'ordre \prec est donc compatible avec la multiplication a droite et a gauche.
 \square On termine le lemme par l'affirmation suivante:

Affirmation 5. *Pour tout f, g tels que $f \succ id$ il existe $n > 0$ tel que $f^n \geq g$.*

Cette affirmation est une consequence directe de l'affirmation

Affirmation 6. *Pour tout $f \succ id$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = +\infty$*

Démonstration : En effet la suite $f^n(x)$ est croissante. Si elle est majorée elle converge. La limite est alors un point fixe de f ce qui contredit l'hypothèse. \square

Donc si $f \succ id$ il existe n tel que $f^n(0) > g(0)$, donc $f^n \succ g$. Le groupe est archimédien. \square

Remarque 12. *$f \prec g$ et $h \prec k$ implique $fh \prec gh \prec gk$. En particulier, on montre par recurrence que, pour tout $n > 0$ $f^n \prec g^n$.*

4.2. Le nombre de translation relatif. Fixons $f \in G$ tel que $f \succ id$. Pour tout n on note $t_{f,n}(g) = \frac{p}{n}$ tel que $f^p \preceq g^n \prec f^{p+1}$

Lemme 4.2. *La suite $t_{f,n}(g)$ converge quand $n \rightarrow \infty$. On note $t_f(g)$ la limite.*

Démonstration : On remarque que $f^p \preceq g^n \prec f^{p+1}$ implique que pour tout $k > 0$, $f^{pk} \preceq g^{nk} \prec f^{(p+1)k}$.

Donc $t_{f,nk} \in [t_{f,n}, t_{f,n} + \frac{1}{n}[$.

En particulier, pour tout n, m positifs on a

$$t_{f,nm} \in \left([t_{f,n}, t_{f,n} + \frac{1}{n}[\cap [t_{f,m}, t_{f,m} + \frac{1}{m}[\right)$$

En particulier $[t_{f,n}, t_{f,n} + \frac{1}{n}[\cap [t_{f,m}, t_{f,m} + \frac{1}{m}[\neq \emptyset$ donc

$$|t_{f,n} - t_{f,m}| < \sup\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}$$

Ceci prouve que la suite $t_{f,n}$ est de Cauchy donc converge. \square

La limite $t_f(g)$ est le *nombre de translation relatif de g par rapport a f* .

Remarque 13. *Si f et g sont les translations τ_r et τ_s de \mathbb{R} , alors $t_f(g) = \frac{s}{r}$.*

Remarque 14. *L'application $g \mapsto t_f(g)$ est croissante de (G, \prec) vers $(\mathbb{R}, <)$. Plus precisément, si $g_1 \prec g_2$ alors $t_f(g_1) \leq t_f(g_2)$.*

Lemme 4.3. *L'application $G \rightarrow \mathbb{R}$ $g \mapsto t_f(g)$ est un homomorphisme de groupe.*

Démonstration : Considérons g, h . On considère gh et hg . Quitte a inverser les rôles on peut supposer $gh \preceq hg$.

Affirmation 7. *Pour tout $n > 0$ on a $gh^n \preceq h^n g$ et $g^n h \preceq h g^n$*

Démonstration : Par récurrence sur n . Pour $n = 1$ c'est notre hypothèse. Voyons le pour $n + 1$:

$$gh^{n+1} = (gh^n)h \preceq (h^n g)h = h^n(gh) \preceq h^n hg = h^{n+1}g.$$

Ceci utilise a plusieurs reprise l'invariance de l'ordre par multiplication a droite et à gauche. De même

$$g^{n+1}h = gg^n h \preceq ghg^n \preceq hg^{n+1}.$$

□

Affirmation 8. *pour tout $n > 0$ $g^n h^n \prec (gh)^n = ghgh\dots gh \prec h^n g^n$*

Démonstration :

On montre cette inégalité par récurrence sur n . Pour $n = 1$ il s'agit juste de notre hypothèse $gh \prec hg$.

Supposons donc $g^n h^n \prec (gh)^n = ghgh\dots gh \prec h^n g^n$, et montrons l'inégalité pour $n + 1$.

$$\begin{aligned} g^{n+1}h^{n+1} &= g^n(gh^n)h \preceq g^n h^n gh \preceq (gh)^n gh = (gh)^{n+1} = \\ &= (gh)(gh)^n \preceq (hg)(h^n g^n) = h(gh^n)g^n \preceq h(h^n g)g^n = h^{n+1}g^{n+1} \end{aligned}$$

□ Fixons un entier $n > 0$ quelconque. Par définition de $t_{f,n}(g)$ et $t_{f,n}(h)$ on a les encadrements suivant

$$\begin{aligned} f^{nt_{f,n}(g)} &\preceq g^n \prec f^{nt_{f,n}(g)+1} \\ f^{nt_{f,n}(h)} &\preceq h^n \prec f^{nt_{f,n}(h)+1} \end{aligned}$$

En multipliant ces intégralités, et en utilisant l'affirmation ci-dessus, on en déduit:

$$f^{n(t_f(g)+t_f(h))} \preceq g^n h^n \preceq (gh)^n \preceq h^n g^n \preceq f^{n(t_f(g)+t_f(h))+2}$$

D'autre part, toujours par définition de $t_{f,n}(gh)$ on a l'encadrement suivant:

$$f^{nt_{f,n}(gh)} \preceq (gh)^n \prec f^{nt_{f,n}(gh)+1}$$

On en déduit :

$$t_{f,n}(g) + t_{f,n}(h) \preceq t_{f,n}(gh) \preceq t_{f,n}(g) + t_{f,n}(h) + \frac{1}{n}.$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$ on obtient $t_f(g) + t_f(h) = t_f(gh)$.

□

Lemme 4.4. *L'homomorphisme $g \mapsto t_f(g)$ est injectif*

Démonstration : Soit g tel que $g \succ id$. Alors il existe $n > 0$ tel que $g^n(0) > f(0)$. Donc $g^n \succ f$ donc $t_f(g) \geq \frac{1}{n}$ (car t_f est un morphisme et une application croissante). □

Corollaire 4.1. *Le groupe G est commutatif.*

Démonstration : Pour tout g, h , $t_f(gh) = t_f(g) + t_f(h) = t_f(hg)$. En particulier $t_f(gh) = t_f(hg)$. Comme l'application $t_f: G \rightarrow \mathbb{R}$ est injective on obtient $gh = hg$. □

Remarque 15. *On a montré en fait que G est isomorphe à un sous groupe de \mathbb{R} .*

Exercice 13. Montrez que $t_f(g).t_g(h) = t_f(h)$ pour tous $f, g, h \in G$ tels que $f \succ id$ et $g \succ id$.

4.3. Semi-conjugaison de G à un sous groupe du groupe des translations.

L'application $g \mapsto t_f(g)$ est un isomorphisme croissant de G sur un sous-groupe de \mathbb{R} . Pour terminer la preuve du théorème, il reste à construire la semi conjugaison $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entre l'action de G et un sous groupe du groupe des translations de \mathbb{R} .

Fixons un point de \mathbb{R} , le point 0 par exemple, et un élément $f \succ id$ de G . L'orbite $\mathcal{A} = G.0$ est une partie de \mathbb{R} .

On note $\mathcal{B} = \{t_f(g), g \in G\}$. Rappelons que \mathcal{B} est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Je vous rappelle le lemme suivant que vous connaissez sans doutes

Lemme 4.5. Soit \mathcal{B} un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Alors:

- Ou bien \mathcal{B} est monogène (engendré par 1 élément. C'est à dire $\mathcal{B} = \mathbb{Z}.b$)
- Ou bien \mathcal{B} est dense dans \mathbb{R} .

Démonstration : Cela correspond a $\inf\{b \in \mathcal{B}, b > 0\} > 0$ ou $\inf\{b \in \mathcal{B}, b > 0\} = 0$.

□

4.3.1. Si \mathcal{B} est monogène. Alors G aussi. Soit g un générateur de G . Alors g est conjugué à une translation par un homéomorphisme h . Cette conjugaison conjugue l'action de G .

4.3.2. Si \mathcal{B} est dense. Nous allons utiliser le résultat classique suivant de topologie de \mathbb{R} :

Lemme 4.6. Soient A et B deux parties de \mathbb{R} . On suppose que

- h est une application croissante surjective de A sur B
- \mathcal{B} est dense dans \mathbb{R} .
- A n'est ni majorée, ni minorée.

Alors h se prolonge de façon unique en une application continue croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Démonstration :

Affirmation 9. Pour tout x on a $\sup\{h(y), y \in \mathcal{A}, y < x\} = \inf\{h(z), z \in \mathcal{A}, z > x\}$.

Démonstration : $\sup\{h(y), y \in \mathcal{A}, y \leq x\} \leq \inf\{h(z), z \in \mathcal{A}, z \geq x\}$, ce qui montre que ces deux quantités sont finies. Un nombre dans l'intervalle ne peut être image d'aucun élément de \mathcal{A} . Si cet intervalle n'est pas vide, cela contredit donc la densité de B . □

On définit alors $h(x) = \sup\{h(y), y \in \mathcal{A}, y < x\} = \inf\{h(z), z \in \mathcal{A}, z > x\}$ □

Remarque 16. L'application $G \rightarrow \mathcal{A}$ définie par $g \mapsto g(0)$ est une bijection croissante.

Corollaire 4.2. L'application $h_0: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ définie par $g(0) \mapsto t_f(g)$ est une bijection croissante.

On note h l'application continue croissante obtenue en prolongeant h_0 . On conclut la preuve du théorème en montrant

Lemme 4.7. h induit une semi-conjugaison de l'action de G avec le groupe $\{\tau_b, b \in \mathcal{B}\}$.

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $g \in G$. On doit montrer $h(x) + t_f(g) = h(g(x))$.

Soit $y \in \mathcal{A} = G.0$ tel que $y \leq x$. Il existe $g_1 \in G$ tel que $y = g_1(0)$. Donc $g(y) \leq g(x)$.

D'autre part, par définition de h_0 on a :

$$h_0(g(y)) = t_f(gg_1) = t_f(g) + t_f(g_1) = h_0(y) + t_f(g)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} h(x) + t_f(g) &= \sup_{y \in \mathcal{A}, y \leq x} h_0(y) + t_f(g) \\ &= \sup\{h_0(g(y)), y \in \mathcal{A}, y \leq x\} \\ &\leq \sup\{h_0(z), z \in \mathcal{A}, z \leq g(x)\} = h(g(x)). \end{aligned}$$

On montre l'inégalité inverse en montrant que les ensembles $\{g(y), y \in \mathcal{A}, y \leq x\}$ et $\{z \in \mathcal{A}, z \leq g(x)\}$ sont égaux. Pour cela on écrit z comme $g(g^{-1}(z))$, avec $g^{-1}(z) \leq x$ et $g^{-1}(z) \in \mathcal{A}$.

On en déduit l'égalité annoncée

$$h(g(x)) = \sup\{h_0(z), z \in \mathcal{A}, z \leq g(x)\} = h(x) + t_f(g) = \tau_{t_f(g)}(h(x)).$$

□

4.4. Définition et intérêt d'une semi-conjugaison. Quel est l'intérêt de ce théorème?

Définition 4.1. Soient F et G deux groupes munis d'actions fidèles sur des espaces métriques X et Y . Soit $h: X \rightarrow Y$ une application surjective. On dit que h est une semi-conjugaison entre F et G s'il existe une application $\rho: F \rightarrow G$ telle que, pour tout x et $f \in F$ on ait: $h(f(x)) = \rho(f)(h(x))$.

Alors

- (1) l'application ρ est un morphisme de F sur G :
 - $\rho(id) = id$ car G est fidèle.
 - $\rho(f_2 f_1)h(x) = h(f_2 f_1(x)) = \rho(f_2)(h(f_1(x))) = \rho(f_2)\rho(f_1)(h(x))$, pour tout x .
- (2) l'image d'une orbite de F est contenue dans une orbite de G . h induit donc une application surjective de l'ensemble des orbites de F sur l'ensemble des orbites de G .
- (3) Considerons un point y de Y et $h^{-1}(y)$ (appelé la fibre au dessus de y). Soit $f \in F$ et $g \in G$ tel que $g = \rho(f)$. Alors $f(h^{-1}(y)) \subset h^{-1}(g(y))$. En appliquant le même raisonnement à f^{-1} et à $h^{-1}(g(y))$, on obtient $f^{-1}(h^{-1}(g(y))) \subset h^{-1}(y)$ D'ou:

$$f(h^{-1}(y)) \subset h^{-1}(g(y)).$$

Autrement dit, tout $f \in F$ preserve les fibres: l'image d'une fibre est une fibre.

Un semi-conjugaison amène une perte d'information. Cette perte d'information est moins importante si:

- ρ est un isomorphisme.
 - la surjectivité assure que, l'image d'une orbite de F est exactement une orbite de G . (si ρ n'est pas surjectif on préférera parler de semi-conjugaison à un sous-groupe de G).
 - l'injectivité signifie qu'il n'y a pas d'éléments de F qui preserve chacune des fibres de h .

- Une bonne partie de l'information perdue est *la dynamique dans les fibres*, car l'action de G est obtenue à partir de celle de f en écrasant les fibres. La semi-conjugaison garde plus d'information si cette dynamique dans les fibres est pauvre: Soit f un élément de F et y un point de Y , tels que y est un point fixe de $\rho(f)$. Dans ce cas f preserve la fibre au dessus de y :

$$f(h^{-1}(y)) = h^{-1}(y).$$

La perte d'information est moins importante si la restriction de f à la fibre $h^{-1}(y)$ est l'identité.

Autrement dit, quand on a obtenu une semi conjugaison, il est important de preciser les propriétés de cette semi-conjugaisons.

4.5. Cas du théorème de Holder. On a déjà vu que l'homomorphisme t_f était un isomorphisme de G sur un sous groupe du groupe de translation.

L'application h est une application continue croissante. Les fibres sont donc des segments compacts.

De plus le sous groupe de translation $\{t_f(g), g \in G\}$ agit sans point fixe sur \mathbb{R} . Aucun élément de G différent de id ne preserve aucune fibre. On en déduit que, pour toute $x \in \mathbb{R}$ l'application h induit une bijection de l'orbite $G.x$ sur l'orbite $t_f(G).h(x)$ de $h(x)$ sur le sous-groupe de translation.

Remarque 17. Soit $I = h^{-1}(x)$ une fibre non réduite à un point. Alors pour tout $g_1, g_2 \in G$

$$g_1 \neq g_2 \Rightarrow g_1(I) \cap g_2(I) = \emptyset.$$

On en déduit

Lemme 4.8. Si h n'est pas un homéomorphisme de conjugaison, alors G est dénombrable.

Démonstration : Toute famille d'ouvert deux à deux disjoint est au plus dénombrable. En effet, à tout ouvert I on peut associer le nombre $p/q \in \mathbb{Q} \cap I$ tel que (q, p) soit le plus petit pour l'ordre lexicographique. C'est une application injective sur \mathbb{Q} qui est dénombrable.

Le famille des intérieurs des fibres de h est donc dénombrable. On conclut avec la remarque précédent le lemme. \square

4.6. Unicité de la conjugante.

Lemme 4.9. Soit $G \subset \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ un sous-groupe qui n'est pas monogène.

Soit $h_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue croissante, non constante, qui realise une semi conjugaison entre G et un sous groupe de translation.

Alors $h_1 = \varphi \circ h$ ou $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de la forme $t \mapsto at + b$.

Remarque 18. Une étude plus approfondie de la structure des orbites de G nous permettrait de generaliser le lemme en omettant l'hypothèse h_1 est croissante: il suffit que h_1 soit continue et non constante.

Démonstration :

Par définition de h_1 , pour tout $g \in G$ il existe un réel $\tau_1(g) \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $h_1(g(x)) = h_1(x) + \tau_1(g)$. De plus l'application $g \mapsto \tau_1(g)$ est un morphisme de G sur un sous-groupe de \mathbb{R} .

Affirmation 10. *Si $g \succ id$ alors $\tau_1(g) > 0$*

Démonstration : Rappelons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g^n(x) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. Comme h_1 est croissante et non constante, cela implique qu'il existe x et $n > 0$ avec $h_1(g^n(x)) > h_1(x)$. Cependant $h_1(g^n(x)) = h_1(x) + n\tau_1(g)$. Donc $n.\tau(g) > 0$ d'où $\tau(g) > 0$ \square

On en déduit que $g \mapsto \tau_1(g)$ est un isomorphisme croissant de G dans un sous-groupe de \mathbb{R} . On en déduit que $t_f(g) \mapsto \tau_1(g)$ induit un isomorphisme croissant entre les deux sous-groupes (archimédiens) $t_f(G)$ et $\tau_1(G)$ de $(\mathbb{R}, +)$, qui sont non-monogènes donc sont denses dans \mathbb{R} .

Cette application se prolonge donc de façon unique en un homéomorphisme croissant de \mathbb{R} qui est de plus un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$. On en déduit:

Affirmation 11. *Pour tout $g \in G$ on a*

$$\tau_1(g) = \tau_1(f).t_f(g).$$

Remarquons que, pour tout $t > 0$, l'application $h_{2,t}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_{2,t}(x) = \frac{1}{t}h_1(x)$, pour $t > 0$ est une autre semi-conjugaison: En effet

$$h_{2,t}(g(x)) = \frac{1}{t}(h_1(g(x))) = \frac{1}{t}(h_1(x) + t_g) = h_{2,t}(x) + \frac{t_g}{t}.$$

On a juste divisé par t les nombres de translations à l'arrivée.

On note

$$h_2 = h_{2,\tau(f)} = \frac{1}{\tau(f)}.$$

Donc h_2 est une semi conjugaison continue croissante telle que, pour tout x on a: $h_2(f(x)) = f(x) + 1$, c'est à dire $\tau_2(f) = t_f(f) = 1$. On en déduit que pour tout g , $\tau_2(g) = t_f(g)$. Autrement dit pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $g \in G$ on a

$$h_2(g(x)) = h_2(x) + t_f(g).$$

Notons $b = h_2(0)$. Alors $h_3 = h_2 - b$ est une semi-conjugaison telle que $\tau_3(g) = t_f(g)$ et $h_3(0) = 0$.

On en déduit que pour tout $g \in G$ on a:

$$h_3(g(0)) = t_f(g).$$

Autrement dit h_3 et h coïncident sur la partie \mathcal{A} . Comme l'image \mathcal{B} est dense, on a vu que l'extension croissante est unique. On en déduit que $h_3 = h$.

Donc $h_1 = \tau_1(f)(h + b)$ ce qui conclut la preuve du lemme. \square

4.7. Une action sans points fixes qui n'est pas conjuguée à un groupe de translation. L'idée est simple: on considère un groupe dénombrable agissant sur \mathbb{R} par translations et de façon minimale; on considère une famille au plus dénombrable d'orbites. On va *ouvrir ces orbites*, c'est à dire remplacer chacun des points par un intervalle.

Ceci peut sembler difficile, puisque chaque orbite est dense. Le lemme suivant explique comment, techniquement, on peut remplacer les points d'une famille dénombrable par des intervalles:

Lemme 4.10. *Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ une partie dénombrable. Soit $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une indexation des éléments de \mathcal{E} . Soit ℓ_i une suite de réels strictement positifs tels que $\sum_i \ell_i < +\infty$.*

Il existe une application continue croissante $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'on a:

- $h^{-1}(x)$ est un singleton si $x \notin \mathcal{E}$
- $h^{-1}(x_i)$ est un segment de longueur ℓ_i

Démonstration : Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$ tel que $x > x_0$ on définit

$$h^{-1}(x) = x + \sum \{\ell_i | x_i \in [x_0, x]\}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$ tel que $x < x_0$ on définit

$$h^{-1}(x) = x - \sum \{\ell_i | x_i \in [x, x_0]\}$$

La fonction $h^{-1}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante, continue et va de $-\infty$ à $+\infty$.

h ainsi défini se prolonge de façon unique en $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue croissante. \square

Considérons $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ une famille (au plus dénombrable mais de cardinal au moins 2) de nombres irrationnels entre eux:

$$\left(\sum n_i a_i = 0 \text{ avec } n_i \in \mathbb{Z} \right) \Rightarrow n_i = 0.$$

Notons $G \subset \mathbb{R}$ le sous-groupe de \mathbb{R} engendré par les a_i . C'est un sous groupe dénombrable dense.

L'application $a \in G$ associe la translation $x \mapsto x + a$ induit un isomorphisme de G sur un sous groupe de translation de \mathbb{R} . Cela engendre une action libre de G par translations sur \mathbb{R} , et dont toutes les orbites sont denses dans \mathbb{R} .

Choisissons $x_1, \dots, x_l \dots$ des points sur des orbites deux à deux différentes. L'union des orbites des x_i forme un ensemble dénombrable $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. On fixe des longueurs ℓ_i , telles que $\sum_i \ell_i < +\infty$ et on construit h comme dans le Lemme 4.10.

On construit une action de \mathbb{Z}^l sur \mathbb{R} , sans points fixes, de la façon suivante:

- x tel que $h(x) \notin \mathcal{E}$ alors $\tilde{g}(x)$ est l'unique y tel que $h(y) = g(h(x))$.
- Soit I une composante connexe de $h^{-1}(\mathcal{E})$. Alors $h(I)$ est un point de \mathcal{E} . $y = g(h(I))$ est un autre point de \mathcal{E} et $h^{-1}(y)$ est un segment J . On définit g sur I comme étant l'unique homéomorphisme affine croissant de I sur J .

5. LE THÉORÈME DE SOLODOV

On s'intéresse aux groupes agissant sur \mathbb{R} avec au plus un point fixe. On a un exemple simple: le groupe affine $A(1, \mathbb{R})$.

Exemple 3. *Un autre exemple: considérons un isomorphisme φ (pas nécessairement croissant) entre deux sous-groupe Γ_- et Γ_+ de $(]0, +\infty[, \times)$. L'ensemble des homéomorphismes f de \mathbb{R} qui coïncident avec h_{γ_-} , $\gamma_- \in \Gamma_-$ sur $] -\infty, 0]$ et avec $\varphi(\gamma_-)$ sur $[0, +\infty[$.*

Plus concrètement, on considère deux familles $\{a_i\}_{i \in \mathcal{E}}$ et $\{b_i\}_{i \in \mathcal{E}}$ de nombres irrationnels entre eux (autrement dit, ce sont des systèmes libres dans le \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R}). On considère les applications f_i qui coïncide avec l'homothétie h_{a_i} sur $[0, +\infty[$ et avec h_{b_i} sur $] -\infty, 0]$.

5.1. Cas des actions admettant un point fixe commun. Dans l'exemple ci-dessus, tous les éléments du groupe ont un point fixe commun (c'était 0 en l'occurrence). Réciproquement, si $G \subset \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ admet un point fixe commun $\{x_0\}$ à tous ses éléments, alors les intervalles $]x_0, +\infty[$ et $] -\infty, x_0[$ sont invariant par l'action du groupe. Le groupe agit donc par restriction sur chacun de ces intervalles.

Si de plus les élément de G avaient au plus un point fixe x_0 , alors il sont sans points fixes sur $]x_0, +\infty[$ et sur $] -\infty, x_0[$. Autrement dit les actions induites par G sur $] -\infty, x_0[$ et sur $]x_0, +\infty[$ sont libres.

Remarquons que $] -\infty, x_0[$ et $]x_0, +\infty[$ sont homéomorphes à \mathbb{R} via par exemple les homéomorphismes $x \mapsto -\log(-x)$ et $x \mapsto \log(x)$, respectivement. Ces actions sont donc conjuguées chacune à une action libre de G sur \mathbb{R} .

Le Théorème de Hölder, appliqué à l'action sur $]x_0, +\infty[$, permet de construire une application continue croissante surjective $]x_0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ qui induit une semi conjugaison de l'action de G avec un sous groupe Γ_+ d'homothéties.

De la même façon il existe une application continue croissante surjective $h_- :] -\infty, x_0[\rightarrow] -\infty, 0[$ qui réalise une semi conjugaison à un groupe d'homothéties Γ_- .

L'application $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vaut h_- pour $x < 0$ et h_+ pour $x > 0$ est alors continue croissante surjective, et réalise une semi-conjugaison de l'action de G sur \mathbb{R} , avec l'action présentée dans l'exemple 3.

On a donc montré:

Théorème 3. *Si $G \subset \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ est un groupe tel que $\forall g \in G \setminus \{id\}$, l'homéomorphisme g a au plus 1 point fixe, et si G admet un point x_0 fixé par tous les élément de G , alors il existe une application continue croissante surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui réalise une semi-conjugaison avec l'une des actions présentées dan l'Exemple 3*

5.2. Enoncé du théorème de Solodov. Le théorème de Solodov dit que les exemples ci-dessus sont essentiellement les deux seules possibilités.

Théorème 4. *Soit $G \subset \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ un groupe agissant sur \mathbb{R} . On suppose que, pour tout $g \in G$ $\text{Fix}(g)$ contient au plus 1 point. Alors:*

- *Ou bien G a un point fixe commun à tous les élément de G : $G.x = \{x\}$.*
- *Ou bien il existe une application continue croissante h que réalise une semi-conjugaison de G avec un sous groupe du groupe affine.*

5.3. Homéomorphismes ayant un point fixe. Si tout homéomorphisme de G n'a aucun point fixe, le théorème de Solodov est un corollaire de celui de Hölder.

On suppose désormais qu'il existe au moins un élément f_0 de G ayant un point fixe x_0 .

On suppose également qu'il n'y a pas de point fixe commun à tous les éléments de G .

Remarque 19. *Considérons l'ensemble des homéomorphismes préservant l'orientation et ayant exactement un point fixe.*

Il y a 4 classes de conjugaisons:

- *les points attracteurs*
- *les point répulseurs*
- *les points repulseurs à droite et attracteurs à gauche. L'homéomorphisme est alors plus grand que l'identité.*
- *les points repulseurs à gauche et attracteurs à droite. L'homéomorphisme est alors plus petit que l'identité.*

Le lemme suivant affirme qu'il n'existe pas de point fixe semi attracteur semi repulseur pour les élément de G .

Lemme 5.1. *$G \subset \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ étant un groupe dont les éléments ont au plus un point fixe. On suppose qu'il n'y a pas de point fixe commun. Alors tout point fixe est attracteur ou repulseur.*

Démonstration : On suppose qu'il existe $f_0 \leq id$ avec un point fixe x_0 . Remarquons que :

- $f_0^n(x) \rightarrow -\infty$ pour tout $x < x_0$ quand $n \rightarrow +\infty$, et
- $f_0^n(y) \rightarrow x_0$ pour tout $y > x_0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Le point x_0 n'étant pas (par hypothèse sur G) un point fixe commun, il existe g tel que $g(x_0) \neq x_0$. Quitte à remplacer g par g^{-1} on peut supposer $g(x_0) > x_0$.

On note $f_1 = gf_0g^{-1}$. Alors $f_1 \leq id$, et $x_1 = g(x_0)$ est son seul point fixe.

Remarque 20. *Pour tout n ,*

$$f_0^n(x_0) = x_0 > f_1(x_0)$$

Remarque 21. *Considérons $y < x_0$. Comme $\lim f_0^n(y) = -\infty$ on obtient qu' Il existe $n_1 > 0$ tel que, pour tout $n \geq n_1$ on a*

$$f_0^n(y) < f_1(y)$$

Remarque 22. *Fixons $z > x_1$. Comme $\lim f_0^n(z) = x_0 < x_1$ et $f_1(z) > x_1$ on obtient qu'il existe n_2 tel que, pour tout $n \geq n_1$ on a*

$$f_0^n(z) < f_1(z)$$

Donc, pour $n \geq \sup\{n_1, n_2\}$ on a que $y < x_0 < z$ et $f_0^n(y) < f_1(y)$ et $f_0^n(x_0) > f_1(y)$ et $f_0^n(z) < f_1(z)$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $y_1 \in]y, x_0[$ et $z_1 \in]x_0, z[$ tels que $f_0^n(y_1) = f_1(y_1)$ et $f_0^n(z_1) = f_1(z_1)$.

Cela contredit l'hypothèse : $f_1^{-1}f_0^n$ a deux point fixes mais n'est pas l'identité. \square

En consequence, tout $g \in G$ ayant un point fixe est ou bien attracteur ou bien repulseur.

5.4. Une relation d'ordre. On note $f \triangleleft g$ si $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq C$ on a $f(x) < g(x)$.

Lemme 5.2. *La relation \triangleleft est une relation d'ordre totale sur G .*

De plus cet ordre est invariant par multiplication à droite et à gauche.

Démonstration : La relation est clairement transitive et antisymétrique.

Il reste à voir que cet ordre est total:

Il suffit de voir que les graphes de f et de g ne peuvent se croiser qu'au plus en un point. \square

Cet ordre n'est pas a priori archimédien: d'ailleurs il ne l'est pas dans le cas du groupe affine:

Exercice 14. *Soit $G \subset A_+(1\mathbb{R})$ un sous-groupe du groupe affine. Pour tout élément $g \in G$ notons $(a_g, b_g) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ tel que $g: x \mapsto a_g x + b_g$.*

Montrez que l'ordre \triangleleft sur G induit l'ordre lexicographique sur $\{(a_g, b_g), g \in G\}$.

En déduire que si $f \in G$ vérifie $a_f > 1$ et si $g \in G$ est une translation, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $g^n \triangleleft f$.

Le lemme suivant montre que (G, \triangleleft) n'est pas loin d'être archimédien:

Lemme 5.3. *Soit f ayant un point fixe et $f > id$, alors pour tout g il existe n tel que $f^n \triangleright g$.*

Démonstration : On choisit $x < fix f < y$. Alors $\lim f^n(x) = -\infty$ et $\lim f^n(y) = +\infty$. En particulier, pour n grand $f^n(x) < g(x)$ et $f^n(y) > g(y)$ ce qui fait que les graphes de f^n et de g : ces graphes ne peuvent donc plus se croiser après y . Donc $f^n(t) > g(t)$ sur $[y, +\infty[$ soit $f^n \triangleright g$. \square

5.5. Nombre de translation relatif à f . Pour tout g on note $\rho_{n,f}(g) = p/q$ de façon que $f^p \triangleleft g^q \trianglelefteq f^{p+1}$.

Lemme 5.4. *La suite $\rho_{n,f}(g)$ converge quand $n \rightarrow +\infty$. On note $\rho_f(g)$ la limite. C'est le nombre de translation de g par rapport à f .*

Lemme 5.5. *$g \mapsto \rho_f(g)$ est un morphisme de G dans \mathbb{R} .*

Ces deux lemmes ont une preuve identique à celle du théorème de Hölder. En fait ceci vaut pour tout groupe muni d'un ordre invariant à droite et à gauche, et possédant un élément f tel que, pour tout g , il existe $n > 0$ tel que $f^n \triangleright g$.

Exercice 15. *Avec les notations de l'Exercice 14, montrez que, si $G \subset A_+(1, \mathbb{R})$ alors*

$$\rho_f(g) = \frac{\log a_g}{\log a_f}.$$

Vous commencerez par montrer que $g \mapsto \log a_g$ est un morphisme de G sur \mathbb{R}_+ . Vous montrerez ensuite que le noyau de ρ_f est exactement l'intersection de G avec le groupe des translations.

5.6. Le noyau de du nombre de translation ρ_f . En corollaire du Lemme 5.3 on a :

Lemme 5.6. *Si $h \in \ker(\rho_f)$ alors h est sans point fixe.*

Démonstration : On a vu que, si g a un point fixe et $g \triangleleft id$ alors il existe n tel que $g^n \triangleleft f$. Donc $n\rho_f(g) \geq 1$, en particulier $g \notin \ker(\rho_f)$. \square

Lemme 5.7. *Si g est sans point fixe, alors $\rho_f(g) = 0$.*

Démonstration : Soit g sans point fixe tel que $g(x) > x$. On va montrer que pour tout $n > 0$, on a $\rho_f(g^n) \leq 1$.

Supposons que $\rho_f(g) > 1$. Alors on a

Affirmation 12. *Pour tout $K \in G$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $K^{-1}gK(x) \geq f(x)$.*

Démonstration : En effet $\rho_f(K^{-1}gK) > 1$. Donc $K^{-1}gK \triangleright f$. Donc pour $x > 0$ grand on a $K^{-1}gK(x) > f(x)$. Comme $g > id$ et $f < id$ sur $] -\infty, x_f]$ on a également $K^{-1}gK(x) > f(x)$ si $|x|$ grand.

Si $K^{-1}gK(z) < f(z)$, les graphes se coupent donc en deux points ce qui permet de construire un élément de G avec deux points fixes, contredisant l'hypothèse sur G . \square

Soit $k \in G$ un élément ayant un point fixe, $k \triangleright id$, tel que $x_k > x_f$. Par exemple $k = gfg^{-1}$ et $x_k = g(x_f)$.

On conclut la preuve en montrant

Affirmation 13. *Il existe $n > 0$ et $z \in \mathbb{R}$ tel que $k^{-n}gk^n(z) < f(z)$.*

Démonstration : On choisit $x > x_k$ et $y = g(x)$. Pour n on note $x_n = k^{-n}(x)$ et $y_n = k^{-n}(y)$.

On a $k^{-1}gk^n(z)(x_n) = y_n$. Cependant x_n et y_n convergent vers x_k . En particulier pour n assez grand on a

$$x_k < x_n < k^{-n}gk^n(x_n) = y_n < g(x_k) < g(x_n).$$

\square

\square

5.7. Propriétés du noyau de ρ_f . Comme il n'y a pas de point fixe commun, il y a deux éléments qui ne commutent pas: le commutateur n'est donc pas l'identité. De plus il appartient au noyau de ρ_f . Donc $\text{Ker}(\rho_f)$ n'est pas réduit à l'élément neutre de G .

De plus $\text{Ker}(\rho_f)$ est un groupe agissant librement sur \mathbb{R} . Nous avons vu au cours de la preuve du Théorème de Hölder que $\text{Ker}(\rho_f)$ est naturellement muni d'un ordre total \triangleleft invariant par multiplication à droite et à gauche.

Lemme 5.8. *Le noyau n'est pas monogène.*

Démonstration : Si $T \geq id$ est un élément du noyau, et si $f \neq id$ possède un point fixe alors T et f ne commutent pas. En effet $T(Fixf) \neq Fixf$.

On en déduit que fTf^{-1} appartient au noyau, et est supérieur à l'identité.

Le groupe engendré par T et fTf^{-1} est inclus dans le noyau, donc est sans point fixe. On en déduit

$$T \succ fTf^{-1} \text{ ou } T \succ f^{-1}Tf.$$

Supposons $T \prec fTf^{-1}$ pour fixer les idées.

On en déduit que $f^n T f^{-n}$ est une suite infinie strictement décroissante d'éléments de $Ker\rho_f$ supérieure à l'identité.

C'est impossible si $Ker\rho_f$ est monogène. □

au cours de la preuve du théorème de Hölder nous avons introduit une relation d'ordre \prec sur $Ker\rho_f$ et nous avons vu

Corollaire 5.1. *$Ker(\rho_f)$ est un groupe ordonné archimédien pour la relation d'ordre \prec .*

Rappelons, d'après le théorème de Hölder, que le choix d'un élément $h \in ker\rho_f$ construit un homomorphisme croissant t_h de $ker\rho_f$ dans \mathbb{R} , +

Finalement nous avons construite une application continue croissante surjective $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $g \in G$, l'application φ est une semi conjugaison de $g \in ker\rho_f$ sur $x \mapsto x + t_h(g)$.

5.8. Action de G par conjugaison sur $Ker\rho_f$.

Lemme 5.9. *Pour tout $k \in G$ l'application $\psi_k: Ker\rho_f \rightarrow Ker\rho_f$, définie par $g \mapsto kgk^{-1}$, est un morphisme de groupe qui est croissant pour \prec .*

De plus $\psi_{k_1 k_2} = \psi_{k_1} \circ \psi_{k_2}$.

Démonstration : $kg_1 g_2 k^{-1} = kg_1 k^{-1} k g_2 k^{-1}$.

Si $g_1(x) < g_2(x)$ alors posons $y = f(x)$. On a $g_1(f^{-1}(y)) < g_2(f^{-1}(y))$ et donc $f g_1 f^{-1}(y) < f g_2 f^{-1}(y)$ car f preserve l'orientation. On en déduit $f g_1 f^{-1} \prec f g_2 f^{-1}$, le morphisme est donc croissant.

On conclut la preuve du lemme en remarquant que pour tout $k_1, k_2 \in G$ et tout $g \in Ker(\rho_f)$ on a:

$$\psi_{k_1 k_2}(g) = k_1 k_2 g (k_1 k_2)^{-1} = k_1 (k_2 g k_2^{-1}) k_1^{-1} = \psi_{k_1}(\psi_{k_2}(g)).$$

□

Remarque 23. *Avec les notations de l'exercice 14, si $G \subset A(1, \mathbb{R})$ alors pour tout $k \in G$, le morphisme ψ_k est l'application qui à une translation $T_b \in G$ associe la translation $T_{a_k \cdot b}: x \mapsto x + a_k \cdot b$.*

sur un sous-groupe dense de \mathbb{R} , on en déduit :

Corollaire 5.2. *Pour tout f_1 il existe $\alpha(f_1) > 0$ tel que, pour tout $g \in Ker\rho_f$ on a $t_h(\psi_{f_1}(g)) = \alpha(f_1)t_h(g)$.*

De plus l'application $f_1 \mapsto \alpha(f_1)$ est un homomorphisme de (G) sur (\mathbb{R}_+, \times) .

Démonstration : Notons $T = t_h(Ker(\rho_f)) \subset \mathbb{R}$. C'est une sous groupe dense de \mathbb{R} . Comme $t_h: Ker(\rho_f) \rightarrow T$ est un isomorphisme croissant, on en déduit que l'application qui à $t_h(g)$ associe $t_h(\psi_{f_1}(g))$ est un isomorphisme croissant de T dense dans \mathbb{R} . Cet isomorphisme se prolonge donc en un isomorphisme continu croissant de \mathbb{R} , $+$. C'est donc une homothétie de rapport $\alpha(f_1) > 0$.

De plus pour tout $k_1, k_2 \in G$ et tout $g \in Ker(\rho_f)$ on a

$$\alpha(k_1 k_2) t_h(g) = t_h(\psi_{k_1 k_2}(g)) = t_h(\psi_{k_1}(\psi_{k_2}(g))) = \alpha(k_1) t_h(\psi_{k_2}(g)) = \alpha(k_1) \cdot \alpha(k_2) \cdot t_h(g)$$

□

Lemme 5.10. *Pour tout $k \triangleright id$ ayant un point fixe, on a $\alpha(k) > 1$*

En conséquence, l'application $k \mapsto \alpha(k)$ est un morphisme croissant de (G, \trianglelefteq) sur $(]0, +\infty[, \times, \leq)$.

Démonstration : C'est la même idée que pour montrer que les éléments sans point fixe sont dans le noyau.

Soit $k \triangleright id$ ayant un point fixe x_k . Rappelons que $h \in Ker(\rho_f)$ est tel que $h \prec 1$.

Pour tout $n > 0$ on considère $k^{-n} h k^n = \psi_{k^{-n}}(h)$. En particulier

$$t_h(k^{-n} h k^n) = \alpha(k)^{-n}$$

Considérons un point $x > x_k$ et $y = h(x)$. Pour tout $n > 0$ on note $x_n = k^{-n}(x)$ et $y_n = k^{-n}(y)$. Rappelons que

- $x_k < x_n < y_n$
- x_n et y_n convergent vers x_k quand n tend vers $+\infty$.

On choisit n tel que $x_k < x_n < y_n < h(x_k)$

De plus $k^{-n} h k^n(x_n) = y_n$.

On a donc

$$k^{-n} h k^n(x_n) = y_n < h(x_k) < h(x_n)$$

On en déduit $k^{-n} h k^n \prec h$ donc $t_h(k^{-n} h k^n) < 1$. Donc $\alpha(k)^{-n} < 1$ soit $\alpha(k) > 1$. Ceci conclut la preuve du lemme.

□

5.9. Une semi-conjugaison. D'après le théorème de Hölder, il existe $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue croissante, qui réalise une semi conjugaison de $Ker \rho_f$ avec un sous groupe dense du groupe des translations. Plus précisément, pour tout $k \in Ker(\rho_f)$ on a

$$\varphi \circ k = T_{t_h(k)} \circ \varphi,$$

où $T_{t_h(k)}$ est la translation $x \mapsto x + t_h(k)$.

On termine la preuve du théorème de Solodov en montrant:

Proposition 5.1. *φ réalise une semi conjugaison entre G et un sous groupe de $Aff(1, \mathbb{R})$.*

Lemme 5.11. *Pour tout $g \in G$, la composée $\varphi \circ g$ est une autre semi conjugaison.*

Démonstration :

En effet, pour tout $g \in G$ et tout $k \in \text{Ker}(\rho_f)$ on a $gkg^{-1} = \psi_g(k)$ et, par définition de φ :

$$\varphi \circ (g \circ k \circ g^{-1}) = T_{t_h(\psi_g(k))} \circ \varphi = T_{\alpha_g t_h(k)} \circ \varphi$$

Donc pour tout $k \in \text{Ker}(\rho_f)$ et tout $g \in \text{Ker}(\rho_f)$ on a :

$$(\varphi \circ k) \circ g = T_{\alpha_h t_f(g)} \circ \varphi \circ h$$

□

D'après l'unicité, à multiplication près par une application affine, de la conjugaison φ , on en déduit qu'il existe $\beta(k)$ tel que $\varphi \circ k = \alpha(k) \cdot \varphi + \beta(k)$.

Cela signifie que, pour tout $k \in G$, l'application φ induit une semi-conjugaison de k à l'application affine $x \mapsto \alpha(k)x + \beta(k)$.

Cela signifie que φ est une semi-conjugaison de G avec un sous-groupe du groupe affine. C'est ce que nous avons annoncé.

6. HOMÉOMORPHISMES DU CERCLE: LA THÉORIE DE POINCARÉ

6.1. Relevé d'un homéomorphisme du cercle. Remarquons d'abord que:

- si $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un homéomorphisme de \mathbb{R} qui commute avec la translation $x \mapsto x + 1$, c'est à dire $F(x + 1) = F(x) + 1$, alors F passe au quotient en une application continue $f: S^1 \rightarrow S^1$ du cercle.
- si F et G commutent avec la translation $x \mapsto x + 1$, et induisent $f, g: S^1 \rightarrow S^1$ alors le quotient de $F \circ G$ est $f \circ g$.
- De plus F^{-1} commute alors également avec la translation, donc passe également au quotient en une application continue du cercle. De l'item précédent on déduit que le quotient de F^{-1} est l'inverse du quotient f de F .
- On en déduit que f est un homéomorphisme du cercle S^1 .

Exemple 4. • R_α rotation d'angle $2\pi\alpha$ définie par $R_\alpha(t) = t + \alpha$.

- $A_{\alpha,\beta}$ définie par $A_{\alpha,\beta}(t) = t + \alpha + \beta \cdot \sin(2\pi t)$, avec $\beta \in]\frac{-1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}[$.

Ces deux exemples sont des applications différentiables F de \mathbb{R} de dérivée > 0 et vérifiant $F(x + 1) = x$: elles passent donc au quotient par P en un homéomorphisme du cercle.

- Plus généralement, on remarque que tout F commutant avec la translation $T_1: x \mapsto x + 1$ est de la forme $x \mapsto F(x) = x + \varphi$ où φ est une fonction périodique de période 1. Réciproquement, si φ est une fonction périodique de période 1 qui est dérivable en tout point, et si la dérivée $\varphi'(x)$ en tout point x est strictement supérieure à -1 , alors la fonction F définie par $x \mapsto x + \varphi$ est un homéomorphisme croissant de \mathbb{R} qui commute avec T_1 .

Le but de cette section est de voir la réciproque.

Théorème 5. Soit $f: S^1 \rightarrow S^1$ un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation. Il existe un homéomorphisme croissant $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \\ P \downarrow & & \downarrow P \\ & S^1 \rightarrow S^1 & \\ & f & \end{array}$$

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $F(x + 1) = F(x) + 1$ (on dit que F commute avec la translation $x \mapsto x + 1$).

Démonstration : L'existence du relèvement provient juste du théorème de relèvement des chemins dans un revêtement: $f \circ P: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ est un chemin dans S^1 et se relève donc sur \mathbb{R} .

On peut aussi le voir simplement de la façon suivante: pour tout $x \in \mathbb{R}$, la projection P induit une bijection de $[x, x + 1[$ sur S^1 , qui est un homéomorphisme préservant l'orientation sur $]x, x + 1[$. On considère $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = h(0)$ (cad, $x \in P^{-1}(h(0))$).

On définit $F_0: [0, 1[\rightarrow [x, x + 1[$ par

$$F_0(t) = (P^{-1}(h(P(t)))) \cap [x, x + 1[.$$

On définit alors F sur \mathbb{R} par $F(t) = F_0(t - E(t)) + E(t)$ où $E(t)$ est la partie entière de t . On vérifie que F est une bijection croissante de \mathbb{R} , donc un homéomorphisme. Par construction, F commute avec la translation $x \mapsto x + 1$ et se projette sur f . □

Exercice 16. *Montrer que tout autre relevé continu de f est de la forme $F + k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On dit que le relevé est unique, à une constante entière près.*

6.2. Rappel: dynamique des rotations. Soit R_α la rotation de S^1 d'angle $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

- Remarquons d'abord que toutes les orbites ont exactement le même comportement: la rotation R_s commute avec R_α , donc conjugue R_α à elle même, et $R_s(0) = s$, donc l'image de l'orbite de 0 est l'orbite de s .
- si $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ alors toutes les orbites sont périodiques de période q .

Théorème 6. *Si $\alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$, alors toutes les orbites de R_α sont denses dans le cercle S^1 : plus précisément, pour tout $s \in S^1$ $\alpha(x) = \omega(x) = S^1$*

Démonstration : On remarque que $\Gamma = P^{-1}(orb(0)) = \{m + n\alpha, m, n \in \mathbb{Z}\}$. Remarquons que c'est un sous groupe de \mathbb{R} . Nous allons voir que Γ est dense dans \mathbb{R} . Pour cela nous allons voir que Γ contient des éléments $s > 0$ arbitrairement petits.

Plus précisément

Lemme 6.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $s \in \Gamma \cap]0, \varepsilon[$.*

Démonstration : On considère les éléments de la forme $s_n = n\alpha - E(n\alpha) \in [0, 1[$. Ces points sont deux à deux distincts, sinon α s'écrirait $\frac{E(n_1\alpha) - E(n_2\alpha)}{n_1 - n_2} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Comme $[0, 1]$ est compact, cette suite possède des valeurs d'adhérence ce qui implique qu'il existe $n_1 \neq n_2$ tel que $s_{n_1} < s_{n_2} < s_{n_1} + \varepsilon$. Alors $s = s_{n_2} - s_{n_1}$ est l'élément annoncé. □

Soit U un ouvert de \mathbb{R} . Il contient un intervalle I d'intérieur non-vide. Notons $\varepsilon > 0$ la moitié de la longueur de I en notons s un élément de Γ donné par le lemme. Alors I rencontre $s\mathbb{Z}$ en donc $U \cap \Gamma \neq \emptyset$. □

Remarque 24. *L'espace des orbites d'une rotation rationnelle est un cercle. L'espace des orbites d'une rotation irrationnelle est un espace non-séparé, muni de la topologie grossière.*

6.3. Nombre de translation d'un homéomorphisme de \mathbb{R} commutant avec $x \mapsto x + 1$. Soit F un homéomorphisme de \mathbb{R} qui commute avec la translation $x \mapsto x + 1$. L'application $F - id$ est donc continue et périodique de période 1: $(F - id)(x + 1) = (F - id)(x)$. En particulier elle est uniformément bornée. On note $m(F)$ et $M(F)$ les bornes inférieures et supérieures de $F - id$.

Théorème 7. *Les suites $\{\frac{m(F^n)}{n}\}_{n \neq 0}$ et $\{\frac{M(F^n)}{n}\}_{n \neq 0}$ convergent vers un même nombre $\tau(F)$ quand n tend vers $\pm\infty$.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{F^n(x)}{n} = \tau(F)$$

Le nombre $\tau(f)$ s'appelle le *nombre de translation* de F .

6.4. Preuve du Théorème 7. La preuve du Théorème 7 est l'objet du reste de cette section. On présente ici la preuve classique de ce théorème, qui se trouve dans de nombreux ouvrages. En cours, j'ai présenté une preuve très courte à l'aide de la preuve que nous avons vue du théorème d'Hölder.

Lemme 6.2. (1) *Pour tout $n > k \geq 0$ on a :*

$$m(F^{n-k}) + m(F^k) \leq m(F^n) \leq M(F^n) \leq M(F^{n-k}) + M(F^k)$$

(2) *Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ on a :*

$$\sup \left\{ \frac{m(F^n)}{n}, \frac{m(F^m)}{m} \right\} \leq \frac{m(F^{mn})}{mn} \quad \text{et} \quad \frac{M(F^{mn})}{mn} \leq \inf \left\{ \frac{M(F^n)}{n}, \frac{M(F^m)}{m} \right\}$$

(3) *Pour tout n on a :*

$$\frac{m(F^{2^n})}{2^n} \leq \frac{m(F^{2^{n+1}})}{2^{n+1}} \leq \frac{M(F^{2^{n+1}})}{2^{n+1}} \leq \frac{M(F^{2^n})}{2^n}$$

(4) $\frac{M(F^n)}{n} - \frac{m(F^n)}{n} \leq \frac{1}{n}$

Démonstration : On écrit

$$F^n(x) - x = F^{n-k}(F^k(x)) - F^k(x) + F^k(x) - x = (F^{n-k} - id)(F^k(x)) + (F^k - id)(x).$$

Le max d'une somme est inférieur à la somme des max donc

$$\max\{F^n(x) - x, x \in \mathbb{R}\} \leq \max\{(F^{n-k} - id)(x)\} + \max\{(F^k - id)(x)\}.$$

Ce qui montre l'item (1).

On en déduit que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ on a

$$\max\{F^{nm}(x) - x, x \in \mathbb{R}\} \leq m \max\{(F^n - id)(x)\}$$

et

$$\max\{F^{nm}(x) - x, x \in \mathbb{R}\} \leq n \max\{(F^m - id)(x)\}.$$

On obtient donc:

$$\frac{M(F^{mn})}{mn} \leq \inf \left\{ \frac{M(F^n)}{n}, \frac{M(F^m)}{m} \right\}.$$

On montre de même $\frac{m(F^{mn})}{mn} \geq \sup \left\{ \frac{m(F^n)}{n}, \frac{m(F^m)}{m} \right\}$, ce qui donne l'item (2) du lemme.

L'item (3) est une conséquence directe de l'item (2). Il reste à montrer l'item (4).

Considérons $x \in \mathbb{R}$ qui réalise le minimum de la fonction $(F^n - id)$ (ce minimum est atteint sur $[0, 1]$ qui est compact). De même, soit $y \in \mathbb{R}$ qui réalise le maximum de $F^n - id$. Remarquons qu'il existe $z \in [x, x+1[$ tel que $z - y \in \mathbb{Z}$. Alors $F^n(x) \leq F^n(z) < F^n(x+1) = F^n(x) + 1$, car F^n est une application croissante et que $F^n(x+1) = F^n(x) + 1$.

Donc

$$F^n(z) - z \leq F^n(x) + 1 - z \leq F^n(x) + 1 - x = (F^n - id)(x) + 1.$$

De plus $F^n(x) - x \leq F^n(z) - z$, par choix de x . On vient de montrer que $M(F^n) - m(F^n) \in [0, 1[$. \square

Corollaire 6.1. *Les suites $\frac{m(F^{2^n})}{2^n}$ et $\frac{M(F^{2^n})}{2^n}$ convergent vers une même limite $\tau(f)$, quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration : D'après l'item (3) du lemme 6.2, la plus grande des suites est décroissante et la plus petite est croissante, elles convergent donc. D'après l'item (4) du lemme 6.2, la différence tend vers 0, donc la limite est la même. \square

Corollaire 6.2. *Les suites $\{\frac{m(F^n)}{n}\}_{n \neq 0}$ et $\{\frac{M(F^n)}{n}\}_{n \neq 0}$ convergent vers $\tau(F)$ quand n tend vers $+\infty$*

Démonstration : On montre $\limsup \frac{M(F^n)}{n} \leq \tau(f)$ et $\liminf \frac{m(F^n)}{n} \geq \tau(f)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on choisit k tel que $\frac{M(F^{2^k})}{2^k} - \tau(f) < \varepsilon$. On écrit $n = 2^k \cdot E(n/2^k) + m$ avec $0 \leq m < 2^k$.

Alors, d'après l'item (4) du lemme 6.2, on montre:

$$\frac{M(F^n)}{n} \leq \frac{E(n/2^k)M(F^{2^k})}{n} + \frac{M(F^m)}{n}.$$

Le premier terme est inférieur à $\frac{M(F^{2^k})}{2^k}$ et le second tend uniformément vers 0 (car $M(F^m)$ prend un nombre fini de valeurs). \square

Fin de la démonstration du Théorème : Finalement pour montrer que la suite $F^n(x)/n$ converge il suffit de voir que $(F^n(x) - x)/n$ converge (car $x/n \rightarrow 0$), et $\frac{m(F^n)}{n} \leq \frac{F^n(x) - x}{n} \leq \frac{M(F^n)}{n}$, par définition de $m(F^n)$.

Pour les temps négatifs, il suffit de voir $M(F^{-1}) = -m(F)$ et $m(F^{-1}) = -M(F)$. En effet, on écrit $(F^{-1} - id)(x)$ comme $(Id - F)(F^{-1}(x))$. \square

6.5. nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle. Remarquons que si F_1 et F_2 sont deux relevés de f alors $\tau(F_1) - \tau(F_2) = k = F_1 - F_2 \in \mathbb{Z}$.

La classe modulo \mathbb{Z} de $\tau(f)$ est bien définie. C'est un point $\rho(f) \in S^1$ appelé nombre de rotation de f .

Remarque 25. (1) Si f est la rotation R_α alors $\rho(f) = \alpha$.

(2) Si f possède un point fixe alors $\rho(f) = 0$.

(3) Si f possède une orbite périodique alors $\rho(f)$ est rationnel c'est-à-dire $\rho(f) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

6.6. propriétés basiques du nombre de rotation : croissance et continuité. Voici d'abord deux propriétés immédiates du nombre de translation :

Lemme 6.3. *Si F et G sont deux homéomorphismes de \mathbb{R} commutants avec $x \mapsto x + 1$ et si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) \leq G(x)$ alors $\tau(F) \leq \tau(G)$*

Lemme 6.4. *Si F et G sont deux homéomorphismes de \mathbb{R} commutants avec $x \mapsto x + 1$. Si F et G commutent alors $\tau(F \circ G) = \tau(F) + \tau(G)$.*

Démonstration : Si F et G commutent, alors $((F \circ G)^n - id)(x) = (F^n - id)(G^n(x)) + (G^n - id)(x)$. \square

Attention : l'hypothèse de commutation de F et G est essentielle dans le lemme ci-dessus. En general, le nombre de rotation n'est pas additif.

Exercice 17. *Soit F et G les fonctions de \mathbb{R} définies par $x \mapsto x + \beta_F \sin^2(2\pi x)$ et $x \mapsto x + 1 + \beta_G \sin^2(2\pi x)$, avec $\beta_F, \beta_G \in]0, \frac{1}{4\pi}[$. Montrez que*

- F et G sont des homéomorphismes de \mathbb{R} qui commutent avec la translation $T_1: x \mapsto x + 1$
- Montrez que les nombre de translations de F et de G sont nuls.
- Montrez que F et G ne commutent pas,
- Montrez que le nombre de translation de $F \circ G$ est non nul. Indication: vous vérifierez que, pour tout x , $F(x) \geq x$ et $G(x) \geq x$. Vous montrerez alors que, pour tout x on a $F \circ G(x) > 0$.

6.7. Homéomorphismes de nombre de rotation rationnel. Soit $f: S^1 \rightarrow S^1$ un homéomorphisme préservant l'orientation. On suppose que $\rho(f)$ est rationnel, c'est à dire qu'il existe F relevé de f tel que $\tau(F) \in \mathbb{Q}$. Quitte à changer le relevé F de f on peut supposer $\tau(F) \in [0, 1[$.

Lemme 6.5. *Si $\rho(f) = 0$ alors f possède un point fixe.*

Démonstration : Alors $\tau(F) = 0$. Supposons que F n'ait pas de points fixes. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $m(F) > \varepsilon$ ou $M(F) < -\varepsilon$.

Notons T_ε la translation $x \mapsto x + \varepsilon$. Dans le premier cas $\tau(F) \geq \varepsilon$ et dans le second $\tau(F) \leq -\varepsilon$ ce qui contredit dans les deux cas $\tau(F) = 0$. □

Corollaire 6.3. *Le nombre de rotation $\rho(f)$ est rationnel si et seulement si f possède des orbite périodique. Si q est la période d'un point périodique, alors $\rho(f)$ est de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$.*

Démonstration : Si $\rho(f) = \frac{p}{q} \pmod{\mathbb{Z}}$ alors $\rho(f^q) = 0$ ce qui implique que f^q possède un point fixe x qui est un point périodique de f . □

Remarque 26. Il existe des homomorphismes de S^1 possédant des points fixes isolé.

Par exemple $A_{0,\beta}: x \mapsto x + \beta \sin(2\pi x)$, $\beta \in [\frac{-1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}] \setminus \{0\}$.

Notons $\mathcal{A}_{0,\beta}$ le relevé de $A_{0,\beta}$ tel que 0 soit un point fixe de $\mathcal{A}_{0,\beta}$.

Remarquons que $m(\mathcal{A}_{0,\beta}) = -|\beta|$ et $M(\mathcal{A}_{0,\beta}) = |\beta|$. On en déduit que $T_\alpha \circ \mathcal{A}_{0,\beta}$ aura des point fixes pour tout $\alpha \in [-\beta, \beta]$.

en conséquence

$$\rho(R_\alpha \circ \mathcal{A}_{0,\beta}) = 0 = \rho(\mathcal{A}_{0,\beta}), \quad \text{pour tout } \alpha \in [-\beta, \beta].$$

Cet exemple montre: que le nombre de rotation n'est pas additif.

Quand un nombre de rotation est rationnel, pour faire changer ce nombre de rotation il faut détruire toutes les orbites périodiques....

6.8. Homéomorphisme de nombre de rotation irrationnel.

Théorème 8. *Soit f un homéomorphisme du cercle tel que $\rho(f)$ soit irrationnel. Il existe une application continue croissante $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui commute avec $x \mapsto x + 1$ et telle que $H \circ F = T_{\tau(F)} \circ H$ pour tout relevé F de f . De plus H est unique à addition d'une constante près*

Avant de prouver ce résultat, laissez moi le commenter un peu:

- : - L'application H serait un homéomorphisme si j'avais écrit "strictement croissant". Mais H peu ne pas être injectif. L'idée est que H peut avoir des "paliers".
- : - L'application H passe au quotient en une application $h: S^1 \rightarrow S^1$ de degré topologique 1.
- : - L'application h est une semi conjugaison de f à la rotation $R_{\rho(f)}$.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ S^1 & \rightarrow & S^1 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ S^1 & \rightarrow & S^1 \\ & R_{\rho(f)} & \end{array}$$

- : - Pour tout x , $H^{-1}(x)$ est un segment I_x et $H(I_x) = I_{R_{\tau(f)}(x)}$

On munit $\text{homeo}(\mathbb{R})$ de l'ordre partiel $G_1 \preceq G_2$ si $G_1 = G_2$ ou si $G_1(x) < G_2(x)$ pour tout x . On note $G_1 \prec G_2$ si $G_1(x) < G_2(x)$ pour tout x (cad $G_1 \preceq G_2$ et $G_1 \neq G_2$).

Soit F un relèvement de f , et soit $\tau = \tau(F) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ Notons \mathcal{G}_F le sous-groupe de $\text{homeo}(\mathbb{R})$ engendré par F et par la translation $x \mapsto x + 1$. Remarquons que tout élément de \mathcal{G}_F peut s'écrire $G = F^m + n$.

Notons $\Gamma_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ le sous-groupe de \mathbb{R} engendré par 1 et τ .

Lemme 6.6. \mathcal{G}_F est totalement ordonnée pour \prec et l'application $F^m + n \mapsto m \cdot \tau(F^m + n)$ est un isomorphisme strictement croissant de \mathcal{G}_F sur Γ_τ .

Démonstration : Remarquons que, pour tout $(m, n) \neq (0, 0)$ l'homéomorphisme $F^m + n$ n'a aucun point fixe: donc $F^m + n \prec Id$ ou $Id \prec F^m + n$, par le théorème des valeurs intermédiaires.

Tout ces applications sont strictement croissantes: on en deduit que si $G_1 \prec G_2$ alors $G_3 \circ G_1 \prec G_3 \circ G_2$, pour tous $G_i \in \mathcal{G}_F$.

Soient G_1 et G_2 deux élément distincts de \mathcal{G}_F . Alors $G_2 - 1 \circ G_1$ est un élément de \mathcal{G}_F donc est $\prec id$ ou $\succ id$ et donc $G_1 \prec G_2$ ou $G_2 \prec G_1$, respectivement.

Remarquons que, comme \mathcal{G}_F est un groupe commutatif, alors $\tau(F^m + n) = m\tau + k$. Le nombre de rotation est un morphisme de \mathcal{G}_F dans Γ_τ . Ce morphisme est injectif car τ est irrationnel. Il est croissant comme on l'a déjà remarqué □

Corollaire 6.4. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on considère $\mathcal{G}_F(x) = \{G(x), G \in \mathcal{G}_F\}$ et $\Gamma_\tau y = \{y + m\tau + n\}$. Il existe une bijection croissante $H_{x,y}$ de $\mathcal{G}_F(x)$ sur $\Gamma_\tau y$ qui à $G(x)$ associe $y + \tau(G)$.

Démonstration : On a vu que l'application que à G associe $G(x)$ est injective et strictement croissante, donc est une bijection croissante, et de même l'application qui à G associe son nombre de translation. □

Corollaire 6.5. L'application $H_{x,y}$ se prolonge de façon unique en une application croissant de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . De plus elle commute avec $s \mapsto s + 1$ et $H_{x,y} \circ F = R_\tau \circ H_{x,y}$.

Démonstration : Le prolongement unique est du au fait que $\Gamma_\tau y$ est dense dans \mathbb{R} , car τ est irrationnel.

L'unicité fait qu'il suffit de vérifier les deux autres propriétés sur la partie $\mathcal{G}_F(x)$. On considère un élément $G(x) \in \mathcal{G}_F(x)$

$$H_{x,y}(G(x) + 1) = y + \tau_{G+1} = y + \tau_G + 1,$$

et

$$H_{x,y}(F(G(x))) = y + \tau_{F \circ G} = (y + \tau_G) + \tau.$$

□

Pour montrer le théorème il suffit à présent de montrer l'unicité, à une constante près. Pour cela il suffit de remarquer que, si deux applications coïncident en un point z , elles coïncident le long de l'orbite pour \mathcal{G}_F , l'image étant l'orbite pour Γ_τ de l'image de z . Cette orbite étant dense et les applications étant croissantes, c'est l'unicité dans le lemme ?? qui assure l'égalité.

L'application $H_{x,y} - H_{x,y}(0)$ convient en envoi 0 sur 0 donc coïncide avec $H_{0,0}$.

7. MINIMAUX

Soit $G \curvearrowright \text{Homeo}(X)$ une action d'un groupe sur un espace X . On rappelle qu'un ensemble *minimal* sous l'action du groupe G est une partie $Y \subset X$ telle que

- Y est invariante sous G : quelque soit $g \in G$ on a $g(Y) = Y$.
- Y est fermée
- Y est minimal pour ces propriétés: si $Z \subset Y$ est une partie fermée invariante alors $Y = Z$.

Une caractérisation est que Y est minimal si pour tout $x \in Y$ de l'orbite de x est dense dans Y :

$$\forall x \in Y, \quad \overline{\text{Orb}(x, G)} = Y.$$

On a vu que sur les espaces compacts toute action admet un minimal. Ce n'est pas vrai en général sur les espaces non compacts. Voici un exemple abstrait, un peu trop compliqué.

Exemple 5. On considère l'espace métrique compact $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ avec comme distance

$$d((x_i)(y_i)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-|i|} |x_i - y_i|.$$

On note X la partie non-compacte de $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ dont les points n'ont qu'un nombre fini de coordonnées égales à 0 ou à 1:

$$X = \{(x_i) \in [0, 1]^{\mathbb{Z}} \mid \#\{i, x_i \in \{0, 1\}\} < \infty\}$$

On considère un homéomorphisme de $[0, 1]$ tel que $f(x) < x$ si $x \neq 0, 1$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on définit alors f_i , l'homéomorphisme de $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ qui consiste à appliquer f à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée, et à laisser les autres inchangées.

Alors le groupe engendré par les f_i agit naturellement sur X , car X est un ensemble invariant par chacun des f_i . De plus l'action du groupe $\langle f_i, i \in \mathbb{Z} \rangle$ sur X n'a pas de minimal.

Démonstration : En effet, pour tout $x = (x_i) \in X$, fixons i_0 tel que $x_{i_0} \notin \{0, 1\}$. L'orbite de x s'accumule sur le point (y_i) définie par $y_i = x_i$ pour $i \neq i_0$ et $y_{i_0} = 0$. Par contre l'orbite de y est contenue dans le fermé $\{x_{i_0} = 0\}$. □

Le but de cette section est de caractériser les actions sur $[0, 1]$, S^1 ou \mathbb{R} possédant des minimaux ainsi que de classifier les minimaux possibles.

7.1. Le segment.

Proposition 7.1. Soit $G \subset \text{Homeo}_+([0, 1])$ un groupe agissant sur $[0, 1]$. Alors tout minimal sous l'action de G est un point fixe commun à tous les éléments de G .

Démonstration : C'est tout simple: pour tout $x \in [0, 1]$, $y = \inf G \cdot x$ est un point fixe commun aux éléments de G . □

7.2. Le cercle.

Théorème 9. *Soit $G \subset \text{Homeo}_+(S^1)$ un groupe agissant sur le cercle S^1 en préservant l'orientation. Alors on a les 3 possibilités suivantes (qui s'excluent deux à deux):*

- (1) *L'action est minimale: toute orbite est dense.*
- (2) *Tout minimal est une orbite finie. Dans ce cas toutes les orbites finies ont meme cardinal.*
- (3) *Il existe un unique minimal qui est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.*

Démonstration :

On suppose que l'action de G n'est pas minimale (sinon il n'y a rien à faire).

Si G a une orbite finie. On oriente cycliquement cette orbite $x_0, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0$. On note $I_i = [x_i, x_{i+1}]$. Alors chaque élément $g \in G$ induit une permutation des I_i et pour tout i, j il existe $g \in G$ tel que $g(I_i) = I_j$.

On en déduit que si $K \subset S^1$ est un fermé invariant, alors $K \cap I_i \neq \emptyset$ pour tout i . Notons $x_i = \inf K \cap I_i$. Alors $\{x_i\}$ est un fermé invariant contenu dans K . Donc si K est minimal, $K \cap I_i$ est réduit à un point. Ce qui termine la preuve dans ce cas.

Si G n'a aucune orbite finie. On a supposé que G possède une orbite x_0 qui n'est ni dense ni finie. L'adhérence de l'orbite $G \cdot x_0$ contient un minimal K qui n'est pas fini, et est différente de S^1 .

Soit I une composant connexe de $S^1 \setminus K$. C'est un intervalle ouvert. Remarquons que, pour tout $g \in G$ on a $g(I) = I$ ou $g(I) \cap I = \emptyset$.

Affirmation 14. *Il existe une famille infinie $g_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$ telle que les $g_n(I)$ soient deux à deux disjoints.*

Démonstration : Dans le cas contraire, les orbites des extrémités de I seraient finies, contredisant l'hypothèse. \square

Remarquons que la somme des longueurs des $g_n(I)$ est majorée par 1, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell(g_n(I)) = 0.$$

On en déduit que, pour tout $x \in I$, l'adhérence de l'orbite de x rencontre K . Mais $\overline{G \cdot x} \cap K$ est un compact invariant par G et contenu dans K donc est égal à K . Donc $K \subset \overline{G \cdot x}$.

On a montré que toute orbite de S^1 contient le minimal K dans son adhérence. En particulier K est l'unique minimal. \square

On conclut la preuve du Théorème par la proposition suivante:

Proposition 7.2. *Si K est un minimal d'une action sur S^1 , que $K \neq S^1$ et K n'est pas fini, alors K est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.*

Plus exactement, il existe un homéomorphisme de S^1 qui envoie K sur l'ensemble de Cantor diadique.

Démonstration : K est d'intérieur vide: sinon son bord serait un compact invariant plus petit. Il est donc totalement discontinu (les composantes connexes sont des points). De plus il est sans point isolés: en effet le dérivé de K (K moins l'ensemble des points isolés) serait également un compact invariant plus petit. \square

Le Cantor diadique \mathcal{C} est l'ensemble des points de $[0, 1]$ qui admettent un développement en base 3 qui n'utilise pas le chiffre 1. Autrement dit il consiste à considérer la suite de compact définie par récurrence de façon suivante:

- $C_0 = [0, 1] =,$
 - $C_1 = C_0 \setminus]1/3, 2/3[= [0, 1/3] \cup [2/3, 1] = I_0 \cup I_1$
 -
- $$\begin{aligned}
 C_2 &= C_1 \setminus \bigcup_{k \equiv 1[2]} \bigcup]\frac{k}{9}, \frac{k+1}{9}[\\
 &= [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1] \\
 &= I_{0,0} \cup I_{0,1} \cup I_{1,0} \cup I_{1,1}
 \end{aligned}$$

- ...
-

$$C_{i+1} = C_i \setminus \bigcup_{k \equiv 1[3^{i+1}]}]\frac{k}{3^{i+1}}, \frac{k+1}{3^{i+1}}[= \bigcup_{\mu \in \{0,1\}^{i+1}} I_\mu$$

où, pour tout $\mu = (\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq i+1}$ le segment I_μ est défini par

$$I_\varepsilon = \left[\sum_{j=1}^{i+1} \frac{2}{3^j} \varepsilon_j, \sum_{j=1}^{i+1} \frac{2}{3^j} \varepsilon_j + \frac{1}{3^{i+1}} \right]$$

- etc...

Alors $\mathcal{C} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i$ est l'intersection d'une suite décroissante de compacts non vide donc est non vide.

On remarque que pour tout i les segments $(I_{\mu\alpha})_{\mu \in \{0,1\}^i}$ sont deux à deux disjoints. La relation d'ordre sur \mathbb{R} induit donc sur cet ensemble une relation d'ordre. On remarque que pour tout $\mu = (\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq i}$ on a $I_{\mu 0}$ et $I_{\mu 1}$ sont les deux seules composantes de C_{i+1} contenues dans I_μ . De plus $I_{\mu 0} < I_{\mu 1}$. On en déduit que, pour tout i , l'ordre induit par celui de \mathbb{R} sur l'ensemble des les segments $I_\mu, \mu \in \{0,1\}^i$ coïncide avec l'ordre lexicographique sur les mots μ .

Pour tout $x \in \mathcal{C}$ on note $\mu(x) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ la suite infinie $\mu(x) = (\varepsilon_j(x))_{i \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\{x\} = \bigcap_i I_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_i}$$

On munit $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ de la distance $\delta((a_j)(b_j)) = \sum_j \frac{1}{2^j} |a_j - b_j|$, et de l'ordre lexicographique. Par construction on obtient:

Lemme 7.1. *L'application $x \mapsto \mu(x)$ est un homéomorphisme croissant de \mathcal{C} , muni de la topologie et de l'ordre induit de \mathbb{R} , sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ muni de la distance δ et de l'ordre lexicographique.*

Lemme 7.2. *Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact d'intérieur vide et sans points isolé. Alors il existe un homéomorphisme de \mathbb{R} qui envoie K sur \mathcal{C} .*

Démonstration : La preuve consiste à refaire pour K la construction que nous avons faite pour \mathcal{C} .

On construit par récurrence une suite de familles de segments $(J_\mu)_{\mu \in \{0,1\}^i}$ de la façon suivante:

- $J = [\inf K, \sup K] = [a, b]$

- On choisit un point $x \in]a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3}[$ tel que $x \notin K$. C'est possible car K est d'intérieur vide. On note $J_0 = [a, \sup K \cap [a, x]]$ et $J_1 = [\inf K \cap [x, b], b]$, et on note $J_0 = [a_0, b_0]$ $J_1 = [a_1, b_1]$
- Pour tout $\mu \in \{0, 1\}^i$ on note $x_\mu \in]a_\mu + \frac{b_\mu - a_\mu}{3}, b_\mu - \frac{b_\mu - a_\mu}{3}[$ tel que $x_\mu \notin K$. On note $J_{\mu 0} = [a_\mu, \sup K \cap [a_\mu, x_\mu]]$ et $J_{\mu 1} = [\inf K \cap [x_\mu, b_\mu], b_\mu]$, et on note $J_{\mu 0} = [a_{\mu 0}, b_{\mu 0}]$ $J_{\mu 1} = [a_{\mu 1}, b_{\mu 1}]$.

On remarque que $J_\mu \cap K = (J_{\mu 0} \cap K) \cup (J_{\mu 1} \cap K)$, que les segments $J_{\mu 0}$ et $J_{\mu 1}$ sont disjoints, et que $J_{\mu 0}$ est inférieur à $J_{\mu 1}$. Finalement on remarque que la longueur $\ell(J_{\mu i})$ est inférieure à $\frac{2}{3}\ell(J_\mu)$. On en déduit que la longueur de J_μ est inférieure à $(\frac{2}{3})^{\ell(\mu)}$, ou $\ell(\mu)$ est la longueur du mot μ .

On considère l'application $x \mapsto \nu(x) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ qui à x associe le mot infini tel que

$$\{x\} = \bigcap_i J_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_i}$$

On vérifie que c'est un homéomorphisme croissant.

L'application $\mu^{-1} \circ \nu : K \rightarrow \mathcal{C}$ est donc un homéomorphisme croissant.

On complète cet homéomorphisme de façon affine sur chaque composante du complémentaire. \square

C'est en fait une propriété plus générale, valable sur des ensembles no plongés dans \mathbb{R} .

Lemme 7.3. *Tout compact métrique totalement discontinu sans point isolé est homéomorphe à \mathcal{C} .*

7.3. La droite: un exemple d'action sans minimal. Soit $I_n \subset \mathbb{R}$ une suite strictement croissante de segment compacts d'intérieur non-vide, tels que I_n est contenu dans l'intérieur de I_{n+1} et que $\mathbb{R} = \bigcup_n I_n$. Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un homéomorphisme vérifiant

- $f_n(x) = x$ si $x \notin I_n$
- $f_n(x) > x$ si $x \in \text{Int}(I_n)$
- $f_n(I_{n-1})$ est disjoint de l'intérieur de I_n

Proposition 7.3. *Le groupe engendré par les f_n n'a pas de minimal sur \mathbb{R} .*

Lemme 7.4. *Notons $a_n = \sup I_n$, et notons F_n l'adhérence de l'orbite de a_n . Alors*

- (1) $F_{n+1} \subset F_n$
- (2) $F_n \cap \text{Int} I_n = \emptyset$
- (3) $\bigcap F_n = \emptyset$

Démonstration : L'orbite de a_n pour f_{n+1} converge vers a_{n+1} . On en déduit que $F_{n+1} \subset F_n$. Regardons un plus petit mot $i_1 \dots i_k$ tel qu'il existe $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ tels que $f_{i_k}^{\varepsilon_k} \circ \dots \circ f_{i_1}^{\varepsilon_1}$ envoie l'un des a_i dans l'intérieur de I_i . Notons $b_0 = a_n$, $b_1 = f_{i_1}^{\varepsilon_1}(a_n)$, \dots , $b_{j+1} = f_{i_{j+1}}^{\varepsilon_{j+1}}(b_j)$.

Ce mot (i_1, \dots, i_k) ne contient aucune lettre $i_j \leq i$. En effet si i_j est l'une des lettres, f_{i_j} est sans effet sur b_{j-1} à moins que le point b_{j-1} soit déjà revenu dans l'intérieur de I_i ce qui signifie un mot plus court.

Considérons $\ell = \sup\{i_j, j \in \{1, \dots, k\}\}$. Remarquons que $\ell > i$. Sinon toutes les lettres sont $f_i^{\pm 1}$.

Notons \mathcal{J} l'ensemble des j tels que $i_j = \ell$. Notons $\mu = \inf \mathcal{J}$. Alors $b_\mu \notin I_{\ell-1}$. Donc les f_n avec $n < \ell$ sont sans effets sur b_μ . On en déduit que $\mu + 1 \in \mathcal{J}$. Sinon le mot ne serait pas le plus court.

Si $\varepsilon_{\mu+1} = -\varepsilon_\mu$, le mot n'était pas réduit, donc pas le plus court. Donc $\varepsilon_{\mu+1} = \varepsilon_\mu$. On en déduit $\mu + 2 \in \mathcal{J}$ et $\varepsilon_{\mu+2} = \varepsilon_\mu$. Ce raisonnement se poursuit, par induction, indéfiniment, amenant une contradiction avec le fait que $b_k \in I_i$. □

7.4. La droite: Critères pour l'existence d'un minimal. On vérifie facilement le lemme suivant:

Lemme 7.5. *S'il existe x tel que $G \cdot x$ admette un majorant (ou un minorant); autrement dit si*

$$\inf\{|\inf G \cdot x|, |\sup G \cdot x|\} < +\infty,$$

alors, toute orbite de G est ou bien majorée, ou bien minorée. Tout minimal est un point fixe commun à tout élément de G . L'adhérence de toute orbite contient un tel minimal.

Démonstration : Supposons que $G \cdot x$ est minoré et notons $y = \inf G \cdot x$. Alors y est un point fixe commun aux éléments de G . Comme les éléments de G préervent l'orientation, on en déduit que y est un majorant des orbites Gz pour $z < y$ et un minorant des orbites Gz avec $z > y$. □

Lemme 7.6. *S'il existe un segment compact J tel que toute orbite rencontre J , alors l'adhérence de toute orbite contient un fermé minimal.*

Démonstration : Quitte à augmenter un peu J , on peut supposer que toute orbite rencontre l'intérieur de J .

Etant donné x , on considère l'ensemble des compacts contenus dans $Gx \cap J$ qui sont intersection d'un fermé invariant avec J , muni de l'inclusion. C'est un ensemble inductif, on prend un plus petit élément K .

Pour tout $y \in K$, l'adhérence de l'orbite de y intersection avec J est un compact plus petit donc égal. On en déduit que l'adhérence de toute orbite contient l'union des orbites de K .

Pour terminer, il reste à voir que l'union des orbites de K est un fermé. Soit z dans l'adhérence du saturé de K . L'orbite de z rencontre l'intérieur de J , par hypothèse. Elle est accumulée par des points dans J d'orbites de K . Ces points sont dans K . Donc le point limite aussi. Donc z appartient à l'orbite d'un point de K . □

Corollaire 7.1. *S'il existe $g \in G$ sans point fixe, alors l'adhérence de toute orbite contient un minimal.*

Plus généralement: S'il existe une famille finie g_1, \dots, g_n sans point fixe commun, alors l'adhérence de toute orbite contient un minimal.

Démonstration : en tout point x de \mathbb{R} notons $f(x) = \sup\{g_i^{\pm 1}(x), i \in \{1, \dots, n\}\}$. C'est une fonction continue croissante, dont les orbites sont dans celles de G . Comme

il n'y a pas de point fixe commun $f(x) > x$. Donc toutes les orbites vont de l'infini à l'infini, et toutes les orbites rencontrent $[0, f(0)]$. \square Plus généralement, il suffit:

Corollaire 7.2. *S'il existe une famille $\mathcal{G} \subset G$ telle qu'en tout x on a $0 < \sup_{g \in \mathcal{G}} g(x) - x < \infty \dots$*

Démonstration : La fonction $x \mapsto \sup_{g \in \mathcal{G}} g(x)$ est alors croissante, et semi continue inférieurement. Cela suffit à montrer que toute orbite tend vers $+\infty$. On en déduit que, pour tout x il existe une suite g_i tel que $x_i = g_i(x_{i-1})$ tend vers $+\infty$ et rencontre $[0, f(0)]$. \square

Corollaire 7.3. *Si G est finiment engendré, il possède un minimal.*

7.5. La droite: Classification des minimaux. Notons \mathcal{C} l'union d'ensemble de Cantor contenus dans $[2i, 2i + 1]$.

Lemme 7.7. *Soit $G \subset \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ ayant un minimal K . alors l'adhérence de toute orbite contient un minimal. De plus, on a les possibilités exclusives suivantes:*

- (1) *toutes les orbites sont denses: $K = \mathbb{R}$ est l'unique minimal.*
- (2) *tous les minimaux sont des points fixes de l'action de G .*
- (3) *tous les minimaux sont chacun une orbite fermée de G , qui est un ensemble discret. De plus il existe $g \in G$ sans points fixes tel que ces minimaux soient chacun une orbite de g .*
- (4) *il existe un homéomorphisme de \mathbb{R} tel que l'image de K soit \mathcal{C} . K est de plus l'unique minimal de G et est contenu dans l'adhérence de toute orbite.*

Démonstration : On suppose que G possède un minimal K . Toute orbite de K est dense dans K .

- (1) Si $K = \mathbb{R}$, toute orbite est dense dans \mathbb{R} , ce qui est le premier cas.
- (2) Si K est majeure ou mineure alors K est réduit à un point fixe commun aux éléments du groupe (en effet $\sup K$ ou $\inf K$ sont des fermes invariants plus petits, donc égaux à K). Dans ce cas toute orbite est majeure ou mineure et tout minimal est un point fixe: on est dans le second cas.
- (3) si K possède un point isolé, alors tous les points de K sont isolés: en effet le dérivé de K est alors invariant et strictement plus petit, donc vide. K est donc une suite de points allant de moins l'infini à plus l'infini. Ordonons la de façon croissante x_i . Soit $f \in G$ tel que $f(x_0) = x_1$ alors $f(x_n) = x_{n+1}$ car f laisse invariant la suite et est croissante.

On en déduit que toute orbite rencontre $[x_0, x_1]$. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$Gx = \bigcup_i f^i(X.x \cap [x_0, x_1]).$$

On considère le centralisateur $C(x_0)$ de x_0 . Les éléments de ce centralisateur fixent tous les x_i . En particulier ils laissent invariant $[x_0, x_1]$ et induisent une action sur $[x_0, x_1]$. Tout minimal pour cette action est un point fixe commun aux éléments de $X(x_0)$. On en déduit que les minimaux de G sont les orbites par f des points fixes communs au centralisateur $C(x_0)$.

- (4) Si K est sans point isole. Alors il existe un homéomorphisme de \mathbb{R} qui envoie K sur \mathcal{C} . De plus comme toute orbite de K est dense dans K , étant donné une composante connexe I de $\mathbb{R} \setminus \mathcal{C}$, il existe $g_i \in G$ tel que $g_i(I)$ converge vers un point de K .

On en déduit que toute orbite de \mathbb{R} est adhérente à K .

□

Corollaire 7.4. *Soit G un groupe agissant sur \mathbb{R} , et possédant au moins 1 minimal. Alors l'union des minimaux est fermée dans \mathbb{R} .*

Démonstration : La réponse est directe s'il existe un unique minimal: c'est le cas d'une action minimal ou d'un minimal homéomorphe à $\tilde{\mathcal{C}}$. L'ensemble des points fixes de l'action est aussi un fermé. Reste le cas des orbites fermées discrètes. Rappelons que, dans ce cas, il existe $g \in G$ tel que les minimaux soient les orbites de g qui sont invariantes par G . On vérifie facilement que si $x_n \rightarrow x$ et si $Gx_n = Orb(x_n, g)$ alors $Gx = Orb(x, g)$. □

7.6. Hiérarchie des d'orbites. Soit $G \subset homeo(X)$ un groupe agissant sur un espace métrique X .

On considère la relation d'équivalence sur X définie par

$$x \simeq y \iff \overline{G.x} = \overline{G.y}$$

Autrement dit, l'orbite de x s'accumule sur y et vice versa.

On note \tilde{X} l'ensemble des classes d'équivalence de la relation \simeq . L'ensemble \tilde{X} est muni d'un ordre naturel: $\tilde{x} \leq \tilde{y}$ si $\overline{G.x} \subset \overline{G.y}$, ou x et y sont des représentants des classes \tilde{x} et \tilde{y} .

Les minimaux quand ils existent, sont les points minimaux pour cet ordre.

- On dit que x est de hauteur 0 si x appartient à un minimal de G .
- On dit que x est de hauteur 1 si x n'est pas de hauteur 0 et si toute orbite contenue dans $\overline{G.x}$ est ou bien de hauteur 0, ou bien équivalente à x . Notons X_0 l'ensemble des points de hauteur 0: c'est un ensemble invariant par G . On considère l'action de G sur $X - X_0$ induite restriction de celle sur X . Le point x est de hauteur 1 s'il appartient à $X - X_0$ et s'il appartient à un minimal de l'action de G sur $X - X_0$.
- On définit ainsi les points de hauteur $k + 1$ comme l'ensemble des points qui ne sont pas de hauteur k , et tel que tout $y \in \overline{G.x}$ est ou bien de hauteur k , ou bien équivalent à x . Cela revient à considérer les minimaux de l'action de G sur le complémentaire $X - X_k$ de l'ensemble des points de hauteur k .

On dit qu'une orbite est de hauteur finie s'il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que cette orbite soit de hauteur k .

exemple:

Proposition 7.4. *Si $G \subset Homeo_+(\mathbb{R})$ est un groupe abélien finiment engendré agissant sur \mathbb{R} , alors toute feuille est de hauteur finie, bornée par le nombre de générateurs k de G . De plus, pour tout $0 \leq i \leq k$, l'union des points de hauteurs inférieure ou égale à i est fermée.*

Démonstration : On procède par récurrence sur le nombre k de générateurs de G , le cas $k = 1$ étant facile: si $G = \langle g \rangle$ alors ou bien g est sans point fixe, alors les minimaux sont les orbites de g . Ou bien g possède un point fixe. Alors toute orbite de la restriction de g à $\mathbb{R} \setminus \text{Fix}(g)$ est un minimal de cette restriction: dans ce cas, les orbites non fixes sont des points de hauteur 1.

Supposons donc la proposition prouvée pour tout $i < k$, et déduisons en la proposition pour k . Soit X_0 l'ensemble des points de hauteurs 0, c'est à dire l'union des minimaux de G . Nous avons vu que c'est un fermé de \mathbb{R} . Chaque composante connexe de $\mathbb{R} \setminus X_0$ est un intervalle ouvert I .

Notons G_I le stabilisateur de I .

Affirmation 15. G_I a au plus $k - 1$ générateurs.

Démonstration : Sinon le quotient serait un réseau, ce qui implique que tout $g \in G$ possède un itéré. □

□

8. UN CRITÈRE POUR PROUVER QU'UN GROUPE EST LIBRE: LE PING-PONG

8.1. semi-groupe (monoïde) libre a 2ℓ -générateurs. On considère $I_0 = \{\emptyset\}$ et pour tout entier $k > 0$, on note $\mathcal{I}_k = \{1, \dots, \ell\}^k \times \{-1, +1\}^k$. On note \mathcal{I} l'union disjointe des \mathcal{I}_k . C'est l'ensemble des *mots finis* dont les lettres sont les $(i, \epsilon) \in \{1, \dots, \ell\} \times \{-1, 1\}$. Un élément I de \mathcal{I} est une suite finie $I = ((i_1, \epsilon_1), \dots, (i_k, \epsilon_k))$. Le nombre k s'appelle la *longueur* du mot et est notée $\ell(I)$.

On munit \mathcal{I} de la loi de *concaténation* qui consiste à mettre bout à bout les mots. Si $x = (x_i, \epsilon_i)_{i \in \{1, \dots, l\}}$ et $y = ((y_j, \delta_j)_{j \in \{1, \dots, m\}})$ alors $xy = (z_k, \mu_k)_{k \in \{1, \dots, l+m\}}$ avec $(z_i, \mu_i) = (x_i, \epsilon_i)$ pour $i \in \{1, \dots, l\}$ et $(z_{l+j}, \mu_{l+j}) = (y_j, \delta_j)$ pour $j \in \{1, \dots, m\}$.

Le mot vide est l'élément neutre (à droite et à gauche) de cette loi.

8.2. réduction d'un mot. On dit qu'un mot y est une réduction d'un mot x si on peut écrire $x = a((i, \epsilon)(i, -\epsilon))b$ et $y = ab$. Autrement dit, le mot y est obtenu à partir du mot x en supprimant une paire $((i, \epsilon)(i, -\epsilon))$.

On dit que deux mots x et y sont équivalents s'il existe une suite finie $x = x_0, \dots, x_k = y$ telle que pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$ on ait ou bien x_i est une réduction de x_{i+1} ou bien x_{i+1} est une réduction de x_i .

Lemme 8.1. *Cette relation est une relation d'équivalence. On note $x \simeq y$.*

Un mot $I = ((i_1, \epsilon_1), \dots, (i_k, \epsilon_k))$ est dit *réduit* si l'on a

$$\forall j \in \{1, \dots, k-1\}, (i_j = i_{j+1}) \Rightarrow (\epsilon_j = \epsilon_{j+1}).$$

A tout mot fini $I = ((i_1, \epsilon_1), \dots, (i_k, \epsilon_k))$ on associe un mot réduit $reduc(I)$ de la façon suivante:

- si I est réduit $reduc(I) = I$.
- si I n'est pas réduit notons I_1 le mot obtenu de façon suivante. On considère le plus petit j tel que $(i_{j+1}, \epsilon_{j+1}) = (i_j, -\epsilon_j)$ et supprime la paire $j, j+1$ du mot. On obtient un mot de longueur strictement plus petite. Après au plus $\ell(I)/2$ telle opération on obtient un mot réduit.

8.3. Le groupe libre a ℓ -générateurs. On vérifie facilement que

Lemme 8.2.

$$(x \simeq y \text{ and } z \simeq w) \implies xz \simeq yw$$

On notera $e_i = (i, 1)$ et $e_i^{-1} = (i, -1)$.

Lemme 8.3. *Le quotient de \mathcal{I} par la relation \simeq est un groupe noté \mathbb{F}_ℓ , engendré par la famille e_1, \dots, e_ℓ et appelé le groupe libre à ℓ générateurs.*

Le groupe \mathbb{F}_ℓ est caractérisé par la propriété universelle suivante:

Lemme 8.4. *Étant donné une famille finie (x_1, \dots, x_ℓ) d'éléments d'un groupe G . Il existe un unique homomorphisme de groupe $\rho: \mathbb{F}_\ell \rightarrow G$ tel que $\rho(e_i) = x_i$.*

Démonstration : On définit d'abord une application φ du monoïde libre à 2ℓ générateurs, à valeurs dans G , qui à la suite (i_j, ϵ_j) associe le produit $x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_k}^{\epsilon_k}$.

On vérifie facilement que $\varphi(x.y) = \varphi(x)\varphi(y)$ et que $\varphi((i, -1)) = \varphi(i, 1)^{-1}$

On vérifie sans peine que, si y est une réduction de x alors $\varphi(x) = \varphi(y)$.

On en déduit que si $x \simeq y$ alors $\varphi(x) = \varphi(y)$. L'application φ passe donc au quotient par \simeq en une application $\rho: \mathbb{F}_\ell \rightarrow G$ qui envoie e_i sur x_i .

On vérifie que ρ est un morphisme.

L'unicité vient du fait qu'un morphisme est entièrement déterminé par l'image de ses générateurs. \square

Remarque 27. Si $G, \{y_1, \dots, y_\ell\}$ possède cette même propriété universelle, alors il existe un isomorphisme de groupe envoyant e_i sur y_i .

On appelle groupe libre à ℓ générateur tout groupe isomorphe à \mathbb{F}_ℓ .

8.4. Groupes définis par générateurs et relations. Etant donné un groupe G ayant une famille finie x_1, \dots, x_k de générateurs, on considère le morphisme φ de \mathbb{F}_k dans G qui associe x_i à $(i, 1)$. Alors G est isomorphe au quotient de \mathbb{F}_k par le noyau du morphisme.

Si le noyau du morphisme φ est le sous-groupe distingué engendré par la famille $\{\omega_j\}_{j \in J}$ d'éléments de \mathbb{F}_k , on dit que G est le *groupe engendré par les générateurs x_i et les relations ω_j* . La donnée des x_i et des ω_j est une *présentation* du groupe G . On note:

$$G = \langle x_1, \dots, x_k \mid \omega_j, j \in J \rangle .$$

On dit que le groupe G est de *présentation finie* si le noyau admet une partie génératrice (en temps que sous-groupe distingué) finie.

8.5. Le ping pong à ℓ générateurs. Soit X un espace topologique, et $f, g \in \text{Homeo}(X)$.

On dit que f, g forment un ping-pong s'il existe $A, B, C, D \subset X$ deux à deux disjoints, tel que

- $X \setminus A \cup B \cup C \cup D \neq \emptyset$.
- $f(X \setminus B) \subset A$
- $f^{-1}(X \setminus A) \subset B$
- $g(X \setminus D) \subset C$
- $g^{-1}(X \setminus C) \subset D$

Remarquons que $f(X \setminus B) \subset A \iff f^{-1}(X \setminus A) \subset B$ En effet $X \setminus B \subset f^{-1}(A)$. Donc $X \setminus f^{-1}(A) \subset X \setminus (X \setminus B)$ soit $f^{-1}(X \setminus A) \subset B$.

Plus généralement, f_1, \dots, f_ℓ forment un Ping Pong à ℓ générateurs s'il existe des parties $A_1, B_1, \dots, A_\ell, B_\ell$ deux à deux disjointes telles que, pour tout i on ait

$$f_i(X \setminus B_i) \subset A_i.$$

Théorème 10. Si f_1, \dots, f_ℓ forment un ping pong, alors le groupe engendré par les f_i est un groupe libre à ℓ générateurs.

Plus précisément le morphisme de $\mathbb{F}_\ell \rightarrow \text{Homeo}(X)$ défini par $e_i \mapsto f_i$ est injectif.

Démonstration : Comme chaque élément de \mathbb{F}_ℓ est représenté par un mot réduit, il suffit de vérifier que l'application naturelle sur le monoïde libre est non nulle sur les mots réduits.

Fixons $p_{2i-1} \in A_i, p_{2i} \in B_i$, pour tout i .

Soit $x = (i_j, \varepsilon_j)$ un mot réduit. On montre par récurrence sur la longueur $\ell(x)$ que, il existe $r \in \{1, \dots, 2\ell\}$ tel que $\rho(p_j) \in A_i$ si $(i_1, \varepsilon_k) = (i, 1)$ et $\rho(p_j) \in B_i$ si $(i_1, \varepsilon_k) = (i, -1)$.

En particulier, $\rho(x)$ n'est pas l'identité. \square

Remarque 28. *La preuve du théorème montre également que tout mot de \mathbb{F}_ℓ possède une unique écriture par un mot réduit: en effet, on est capable d'exhiber sa première lettre, et on applique le même raisonnement au mot privé de sa première lettre, obtenant la seconde lettre, et ainsi de suite.*

8.6. exemples de Ping Pong.

Théorème 11. *On considère l'action naturelle de $PGL(2, \mathbb{R})$ sur $S^1 = \mathbb{RP}^1$. Soient f et g deux éléments hyperboliques de $PGL(2, \mathbb{R})$, dont les directions propres sont deux à deux distinctes.*

Alors il existe $n > 0$ tel que le groupe engendré par f^n et g^n soit libre.

Démonstration : On choisit des segments A, B, C, D disjoints du cercle, tel que l'intérieur de A contient le point fixe attracteur de f , l'intérieur de B contient le point fixe répulseur de f , l'intérieur de C contient le point fixe attracteur de g , l'intérieur de D contient le point fixe répulseur de g .

On remarque que pour n assez grand, $f^n(S^1 \setminus B) \subset A$ et $g^n(S^1 \setminus D) \subset C$ ce qui montre que l'on a un Ping Pong. \square

Exercice 18. *Soit G un groupe isomorphe à un sous-groupe du groupe affine. Soit $\rho: G \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ un morphisme. On suppose que $\rho(G)$ contient deux éléments A et B qui ont chacun deux valeurs propres réelles et de modules distinctes (autrement dit, A et B vues comme agissant sur S^1 sont des éléments hyperboliques).*

Montrez que A et B ont une direction propre commune. Indication: on montrera que, pour tout $x, y \in G$, $[[x, y], x[x, y]x^{-1}] = e_G$.

8.7. Conséquences.

Corollaire 8.1. *L'écriture d'un mot d'un groupe libre par un mot réduit est unique.*

Corollaire 8.2. *Soit \mathbb{F}_2 le groupe libre à deux générateurs (x, y) . Alors les parties $(x, yxy^{-1}, \dots, y^nxy^{-n})$ engendrent toutes des sous-groupes libres à n générateurs.*

Le sous-groupe engendré par tous les y^nxy^{-n} n'admet pas de système fini de générateurs.

Démonstration : Considérons un Ping Pong $f, g: X \rightarrow X$ avec ses parties associées A, B, C, D $f(X \setminus B) \subset A$ et $g(X \setminus D) \subset C$.

Alors les parties $A, B, g(A), g(B), g(C)$ sont disjointes deux à deux (car A, B, C, D sont disjointes deux à deux ce qui implique $g(A), g(B)$ et $g(C)$ sont trois parties disjointes de C). De plus

$$gf g^{-1}(X \setminus g(B)) \subset g(A)$$

On montre alors par récurrence que les parties $A, B, g(A), g(B), \dots, g^n(A), g^n(B)$ sont disjointes deux à deux et que

$$g^n f g^{-n}(X \setminus g^n(B)) \subset g^n(A).$$

On a donc un Ping Pong associé à la famille de fonctions $f, gf g^{-1}, \dots, g^n f g^{-n}, \dots$



En fait on peut montrer:

Théorème 12. *Tout sous groupe d'un groupe libre est libre.*

C'est un résultat difficile. Je n'en connais pas la preuve.

9. GROUPES LIBRES ENGENDRÉS PAR DES HOMÉOMORPHISMES GÉNÉRIQUES

9.1. **Topologie de l'espace des Homeomorphismes ou difféomorphisme.** Soit X un espace compact métrique. On munit $\text{Homeo}(X)$ d'une distance

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} \{d(f(x), g(x)), d(f^{-1}(x), g^{-1}(x))\}.$$

La topologie associée à cette distance est la C^0 -topologie.

On vérifie

Lemme 9.1. *$\text{Homeo}(X)$ est un groupe topologique: le produit et le passage à l'inverse sont continus. De plus $\text{Homeo}(X)$ est un espace métrique complet.*

Soit M une variété compacte. On munit $\text{Diff}^r(M)$ de la distance

$$d^r(f, g) = \sup_{x \in M} (d(f(x), g(x)) + \|Df(x) - Dg(x)\| + \|D^2f(x) - D^2g(x)\| + \dots)$$

Ces expressions sont à calculer dans des cartes locales.

Munis de ces distances, $\text{Diff}^r(M)$ est un espace métrique localement complet. Des fermés complets sont les ensembles de difféomorphisme dont la norme de Df et de Df^{-1} sont bornées par une constante K . Cela forme une exhaustion par des fermés complets, chacun étant contenu dans l'intérieur de l'autre.

On a une métrique complète induisant la même topologie en considérant la distance :

$$d^r(f, g) = \sup_{x \in M} (d(f(x), g(x)) + \|Df(x) - Dg(x)\| + |Df^{-1}(x) - Dg^{-1}(x)| + \|D^2f(x) - D^2g(x)\| + \dots)$$

9.2. **Propriété génériques.** Si \mathcal{X} est un espace métrique complet, il vérifie la propriété de Baire:

Théorème 13. *Si \mathcal{X} est un espace métrique complet, alors pour toute famille dénombrable $\mathcal{O}_i, i \in \mathbb{N}$ d'ouverts denses, l'intersection $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_i$ est une partie dense.*

Une partie de \mathcal{X} est dite *résiduelle* si elle contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.

Une propriété \mathcal{P} est dite *générique* sur \mathcal{X} si elle est vraie sur une partie résiduelle de \mathcal{X} . Par abus de langage, on dit que les points génériques de \mathcal{X} vérifient \mathcal{P} .

9.3. Groupes libres engendrés par des homéomorphismes génériques.

Théorème 14. *(Ghys) Il existe une partie résiduelle $\mathcal{F} \subset \text{Homeo}(S^1)^2$ telle que pour tout $(f, g) \in \mathcal{F}$ le groupe engendré par f et g est libre.*

(ce théorème reste vrai si on remplace S^1 par n'importe quelle variété compacte (ou même non compacte mais il faut préciser la topologie utilisée) et pour les difféomorphismes de classe C^r pour r quelconque).

Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante:

Proposition 9.1. *Pour tout mot réduit ω de \mathbb{F}_2 l'ensemble des paires $(f, g) \in \text{Homeo}(S^1)^2$ qui vérifie la relation ω est d'intérieur vide.*

On dit que la relation ω est vérifiée sur un triplet (x, f, g) si l'homéomorphisme $\omega(f, g)$ admet x comme point fixe.

Lemme 9.2. *Pour tout mot ω , l'ensemble des triplets (x, f, g) qui vérifient ω est un fermé de $S^1 \times \text{Homeo}(S^1)^2$.*

Cette proposition est elle même conséquence du lemme suivant.

Lemme 9.3. *Pour tout mot réduit ω l'ensemble des triplets $(x, f, g) \in S^1 \times \text{Homeo}(S^1)^2$ qui vérifient la relation ω est d'intérieur vide.*

Démonstration : On fait une preuve par l'absurde en supposant qu'il existe un ouvert de triplets (x, f, g) qui vérifient une relation ω définie par un mot réduit. On considère le mot $\omega = w_k \dots w_1$ de plus petite longueur tel que qu'il existe un tel ouvert $\mathcal{O} \subset S^1 \times \text{Homeo}(S^1)^2$ sur lequel ω est vérifié.

Remarquons que pour tout $i < k$ et pour tout mot réduit $m = m_i \dots, m_1$, l'ensemble des (x, f, g) tels que la relation m est vérifiée sur (x, f, g) est un fermé (d'après le lemme) d'intérieur vide. L'ensemble des mot réduit de longueur inférieure à k est fini. L'union d'une famille finie de fermés d'intérieur vide est un fermé d'intérieur vide.

On en déduit qu'il existe un ouvert dense \mathcal{O}_0 dans \mathcal{O} pour lequel aucune relation de longueur inférieure à k n'est vérifiée. Cet ouvert contient un ouvert produit $U \times O_f \times O_g$.

Prenons (x, f, g) dans cet ouvert. Notons $x_0 = x$ et pour tout i notons et $x_i = \omega_i(f, g)(x)$. Les x_i sont des points deux à deux distincts. On fait une perturbation de l'homéomorphisme $h = w_i(f, g) \in \{f, g, f^{-1}, g^{-1}$ à support dans un voisinage U de x_{k-1} disjoint des $x_j, j \neq k-1$ de façon que $h(x_{k-1}) \neq x$. On a toujours $\omega_{k-1}(\tilde{f}, \tilde{g})(x) = x_{k-1}$.

Mais $\omega(\tilde{f}, \tilde{g})(x) \neq x$ ce qui contredit le choix de x .

□

10. GROUPE AFFINE PAR MORCEAU

On considère le sous ensemble $\mathcal{PA} \subset \text{Homeo}_+([0, 1])$ qui sont affines par morceaux.

Théorème 15. *Le groupe \mathcal{PA} ne contient pas de sous groupe libre à deux générateurs.*

Plus précisément, nous allons montrer

Proposition 10.1. *Tout sous groupe non monogène à deux générateurs contient un sous groupe abélien libre de rang deux.*

On conclut en utilisant le fait que tout sous groupe du groupe libre est libre (ce ne peut donc pas être un sous-groupe abélien libre à deux générateurs).

Nous allons utiliser

Lemme 10.1. *Soient h_1 et h_2 deux homéomorphismes de $[0, 1]$, de support disjoints, et tels que $h_i \neq \text{id}$ pour $i = 1, 2$. Alors le groupe engendré par h_1 et h_2 est isomorphe à \mathbb{Z}^2 .*

On peut faire une preuve directe de ce lemme. On peut aussi remarquer que $\text{Homeo}_+([0, 1])$ est sans torsion. Un groupe abélien est donc toujours un groupe abélien libre. Il n'est pas monogène, (sinon tous les éléments auraient le même support), il est donc libre à deux générateurs.

On considère l'ensemble $\text{Fix}(f, g)$ des points fixes communs à f et g . Comme f et g sont affine par morceaux, $\text{Fix}(f, g)$ est l'union d'un nombre fini de points et de segments. En particulier, $[0, 1] \setminus \text{Fix}(f, g)$ a un nombre fini de composantes connexes. Nous noterons I_1, \dots, I_k les adhérences des composantes connexes de $[0, 1] \setminus \text{Fix}(f, g)$.

Nous utiliserons le lemme suivant, sur chacune des composantes I_j .

Lemme 10.2. *Si f et g sont des homéomorphismes croissants de $[0, 1]$ sans points fixes communs sur $]0, 1[$, alors, pour tous $x, y \in]0, 1[$, il existe un élément h du groupe engendré par f et g tel que $h(x) < y$.*

Démonstration : On considère juste l'application $h_0 = \inf\{f, g, f^{-1}g^{-1}\}$ qui est un homéomorphisme sans points fixe sur l'intérieur $]0, 1[$. \square

10.1. Preuve du Théorème. On suppose que $\langle f, g \rangle$ est un groupe libre à deux générateurs.

Lemme 10.3. *Il existe un sous groupe $H \neq \{\text{id}\}$ de $\langle f, g \rangle$ tel que tout $h \in H$ est de support contenu dans $[0, 1] \setminus \text{Fix}(f, g)$.*

Démonstration : L'ensemble des élément de $\langle f, g \rangle$ à support dans $[0, 1] \setminus \text{Fix}(f, g)$ est clairement un sous groupe. Il suffit de montrer qu'il n'est pas trivial.

Pour cela on constate que le commutateur $fgf^{-1}g^{-1}$ n'est pas l'identité. Sinon f et g commutent. Alors ou bien $\langle f, g \rangle$ est monogène, ou bien il contient un sous groupe libre à deux générateurs et on a fini.

Le commutateur $[f, g]$ est égal à l'identité au voisinage des points fixes communs x_0 de f et g , car f et g sont affine sur les intervalles $]x_0 - \varepsilon, x_0]$ et $[x_0, x_0 + \varepsilon[$. Donc ils commutent aux voisinage de x_0 .

En conséquence le support de $fgf^{-1}g^{-1}$ est contenu dans $[0, 1] \setminus \text{Fix}(f, g)$, c'est à dire qu'il appartient à H . \square

Pour tout $h \in H$ on note $S(h) \subset \{1, \dots, k\}$ l'ensemble des i tel que le support de h rencontre I_i , et $s(h)$ le cardinal de $S(h)$. Nous allons montrer:

Lemme 10.4. *Pour tout $h \in H$ il existe $h' \in H$ tel que $S(h') = S(h)$ mais il existe $i \in S(h)$ tel que $\text{supp}(h) \cap \text{supp}(h') \cap I_i = \emptyset$.*

Voyons comment conclure a partir de ce lemme. Le commutateur $h_1 = hh'h^{-1}h'-1$ vérifie $S(h_1) \subset S(h) \setminus \{i\}$ car h et h' commutent sur I_i . Donc $s(h_1) < s(h)$. Si $s(h_1) = 0$ alors $h_1 = i$ c'est a dire que h et h' commutent. Mais le groupe engendré par h et h' n'est pas monogène, car en restriction à I_i ; d'après le lemme, c'est un groupe abélien libre à deux générateurs. Donc $\langle h, h' \rangle = \mathbb{Z}^2$ et on a fini. Dans le cas contraire on recommence avec h_1 au lieu et place de h . Ou plus simplement, on choisit $h \neq id$ tel que $s(h)$ soit le plus petit possible.

Démonstration : Considerons $i \in S(h)$ et soit $[x, y] \subset \text{Int}(I_i)$ un segment tel que $\text{supp}(h) \cap I_i \subset I_i$. On considère un élément $\varphi \in \langle f, g \rangle$ tel que $\varphi(x) > y$. Un tel élément existe car f et g induisent deux homéomorphismes de I_i sans point fixe commun. Remarquons que $\varphi([x, y]) \cap [x, y] = \emptyset$. Notons $h' = \varphi h \varphi^{-1}$. Alors $\text{supp}(h') = \varphi(\text{supp}(h))$. □

11. CONTRÔLE DE DISTORSION: THÉORÈME DE DENJOY, LEMME DE KOPELL

11.1. Le lemme de Kopell.

Théorème 16. *Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ un difféomorphisme de classe C^r , $2 \leq r \leq +\infty$. On suppose que 0 est le seul point fixe de f . Soit $g: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ un difféomorphisme de classe C^1 . On suppose que g commute avec f .*

Alors

$$\text{Fix}(g) \neq \{0\} \iff g = \text{id}.$$

Autrement dit l'action du centralisateur $C_1(f)$ sur $]0, +\infty[$ est libre.

La preuve de ce théorème est l'objet de cette section. Pour fixer les idées, et quitte à remplacer f par f^{-1} on supposera

$$f(x) < x, \text{ pour } x \neq 0.$$

Remarque 29. *Si x_0 est un point fixe de g alors toute l'orbite de x_0 pour f (i.e. $\{f^i(x_0)\}$) est composée de points fixes de f . Remarquons que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x_0) = 0$$

Donc 0 n'est pas un point fixe isolé de g . Comme g est supposé de classe C^1 (au moins), on obtient:

$$Dg(0) = 1.$$

11.1.1. *Contrôle de la distorsion de Df^n , dans un domaine fondamental de f .* Le principal ingrédient de la preuve de Kopell, qui est déjà la clé du Théorème de Denjoy, c'est le contrôle de la distorsion des itérés f^n de f .

La distorsion de f entre deux points y et z c'est le rapport des différentielles $\frac{Df(y)}{Df(z)}$. Quand n tends vers l'infini la différentielle Df^n peut aussi bien tendre vers 0 que l'infini ou osciller entre des constantes. Le rapport $\frac{Df^n(y)}{Df^n(z)}$ n'est donc pas a priori borné. On appelle contrôle de la distorsion, les résultats qui permettent de borner ce rapport, dans des situations bien précises.

C'est en général un type d'argument typique des régularités C^r , $r > 1$.

Théorème 17. *Soit $x \in]0, +\infty[$. Il existe $C(x) > 1$ tel que pour tout $y, z \in [f(x), x]$, pour tout $n \geq 0$ on ait*

$$\frac{1}{C(x)} \leq \frac{Df^n(y)}{Df^n(z)} \leq C(x).$$

Démonstration : On écrit $Df^n(y) = \prod_{i=0}^{n-1} Df(f^i(y))$. Les produits étant plus difficiles à contrôler que les sommes, on passe au log:

$$\left| \log \left(\frac{Df^n(y)}{Df^n(z)} \right) \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \log Df(f^i(y)) - \log Df(f^i(z)) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\log Df(f^i(y)) - \log Df(f^i(z))|.$$

Comme f est de classe C^2 et que $Df \neq 0$ (car f est un difféomorphisme), $\log Df$ est de classe C^1 . Notons $c(x) = \sup_{y \in [0, x]} |\log Df(y)|$. Du théorème des accroissements finis on déduit:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\log Df(f^i(y)) - \log Df(f^i(z))| \leq c(x) \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(y) - f^i(z)|.$$

Mais y et z ont été choisis dans le même domaine fonamental $[f(x), x]$ et la somme des longueurs $\sum_{i=0}^{+\infty} \ell([f^{i+1}(x), f^i(x)])$ est précisément x .

On en déduit

$$\left| \log \left(\frac{Df^n(y)}{Df^n(z)} \right) \right| \leq c(x) \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(y) - f^i(z)| \leq xc(x).$$

Soit finalement

$$e^{-xc(x)} \leq \frac{Df^n(y)}{Df^n(z)} \leq e^{xc(x)}.$$

□

11.1.2. *Contrôle de la distorsion de g le long d'une orbite de f .* Soit G un difféomorphisme classe C^1 de $[0, +\infty[$, qui commute avec f . Alors on a

$$(DG)(f^n(x)) \cdot Df^n(x) = D(G \circ f^n)(x) = D(f^n \circ G)(x) = (Df^n)(G(x)) \cdot DG(x).$$

On réécrit

$$\frac{DG(x)}{(DG)(f^n(x))} = \frac{Df^n(x)}{Df^n(G(x))}.$$

Le contrôle de la distorsion de DG entre les points y et $f^n(y)$ pour n arbitrairement large, est donné par celui de la distorsion f^n entre les points y et $G(y)$.

11.1.3. *Majoration de la dérivée Dg^k sur $[f(x_0), x_0]$.* Fixons désormais x_0 un point fixe de g . On considère $G = g^k$ pour $k \in \mathbb{Z}$ arbitraire.

Alors pour tout $y \in [f(x_0), x_0]$ on a $G(y) \in [f(x_0), x_0]$. D'après le Théorème 17 on obtient:

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, tout $n > 0$ et tout $y \in [f(x_0), x_0]$ on a :

$$\frac{1}{C(c_0)} \leq \frac{Dg^k(y)}{(Dg^k)(f^n(y))} \leq C(x_0).$$

Faisons tendre n vers $+\infty$, y et k restant constant. Le point $f^n(y)$ tend vers 0. Comme g est supposé être de classe C^1 , et donc g^k aussi, on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Dg^k(f^n(y)) = Dg(0)^k = 1.$$

On vient d'obtenir le lemme suivant

Lemme 11.1. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $y \in [f(x_0), x_0]$ on a:*

$$\frac{1}{C(c_0)} \leq Dg^k(y) \leq C(x_0).$$

On conclut la preuve en remarquant:

Lemme 11.2. *Soit g un difféomorphisme croissant d'un intervalle compact I (pour nous ce sera $[f(x_0), x_0]$). S'il existe K tel que pour tout k et tout $y \in I$, $Dg^k(y) < K$, alors la restriction de g à I est l'identité.*

Démonstration : Supposons que $g \neq id$ et soit $[a, b]$ l'adhérence d'un composante connexe de $I \setminus Fixg$. Supposons pour fixer les idées que $g > id$ sur $]a, b[$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k > 0$ tel que $g^k(a + \varepsilon) > b - \varepsilon$. Le théorème des accroissements finis implique qu'il existe $y \in [a, a + \varepsilon]$ tel que $Dg^k(y) = \frac{b-a-\varepsilon}{\varepsilon}$. Quand ε tend vers 0 le quotient $\frac{b-a-\varepsilon}{\varepsilon}$ tend vers $+\infty$ donc devient supérieur à K , ce qui conclut. \square

11.2. Difféomorphismes commutants de classe C^2 de $[0, 1]$.

Corollaire 11.1. Soient f un difféomorphisme croissant de $[0, 1]$. On suppose que f est de classe C^1 . Alors, pour tout $g \in Diff^2([0, 1])$ qui commute avec f on a $Fix(f) \setminus Int(Fix(f)) \subset Fix(g)$.

Démonstration : x un point fixe de f qui n'est pas dans l'intérieur. On l'itere par g : son orbite converge vers un point fixe attracteur de g sur lequel on peut appliquer le lemme de Kopell, à g . Donc f est l'identité sur toute la composante, ce qui contredit l'hypothèse. \square

Corollaire 11.2. Si $f \in Diff^2([0, 1])$ est tel que $Fix(f)$ est d'intérieur vide, alors $C_2(f)$ est abélien.

11.3. **Action des groupes nilpotents sur $[0, 1]$.** Etant donné un groupe, on note $G_1 = [G, G]$ le sous groupe de G engendré par les commutateurs de G . C'est toujours un sous-groupe distingué de G . En effet le conjugué d'un produit de commutateur est le produit du commutateur des conjugués.

On note $G_2 = [G, G_1]$ le sous groupe engendré par les commutateurs dont 1 des deux termes au moins appartient à G_1 . le sous-groupe est distingué dans G et dans G_1 .

Par récurrence on note $G_{i+1} = [G_i, G]$. C'est un groupe distingué dans G et donc aussi dans G_i .

Un groupe G est dit nilpotent s'il existe i tel que $G_i = \{e\}$.

Exemple 6. Le groupe de transformation affine de \mathbb{R}^2 défini par $f : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$ $g : (x, y) \mapsto (x, y + x)$ et $h : (x, y) \mapsto (x, y - 1)$.

Alors h commute avec f et g mais $fgf^{-1}g^{-1} : (x, y) \xrightarrow{g^{-1}} (x, y - x) \xrightarrow{f^{-1}} (x - 1, y - x) \xrightarrow{g} (x - 1, y - x + (x - 1)) \xrightarrow{f} (x, y - 1) = h(x, y)$.

Exercice 19. Montrez que le groupe engendré par f, g, h est nilpotent.

Théorème 18. Si G est un groupe nilpotent alors pour tout $\rho : G \rightarrow Diff^2([0, 1])$ l'image $\rho(G)$ est abélienne.

Démonstration : On fait la preuve par récurrence sur la longueur de la suite de nilpotence du groupe.

On considère le noyau de ρ . Alors G/ρ est aussi nilpotent et sa suite est de longueur plus petite ou égale (si la suite est strictement plus courte, on a fini, par hypothèse de récurrence), et ρ induit un isomorphisme de G/ρ sur $\rho(G)$. On peut donc supposer que ρ est un isomorphisme.

On considère le centre Z de G . Pour chaque $g \in Z$ le groupe G fixe les points de $Fixg \setminus Intfixg$. De plus, sur chaque composante de $0, 1 - Fixg$ les autres éléments de G sont ou bien l'identité, ou bien sans point fixe. Finalement, l'action de G sur l'adhérence d'une composante du complémentaire de $Fixg$ est abélienne, d'après Kopell.

On considère l'adhérence de l'union de toutes ses composantes pour tout $g \in Z$. C'est l'adhérence de l'union des supports des éléments de Z . Cette adhérence est invariante par G et l'action de G sur cette adhérence est abélienne. Le complémentaire est l'intérieur des points fixés par Z .

Prenons l'adhérence I une composante de $IntfixZ$. L'action G sur I passe au quotient en un groupe dont la suite est strictement plus petite. L'action y est donc abélienne par hypothèse de récurrence. \square

Exemple d'action C^0 nilpotente:

12. DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE: THÉORIE DE DENJOY

12.1. Contre-exemple de Denjoy. On appelle contre-exemple de Denjoy tout homéomorphisme ou difféomorphisme du cercle, dont le nombre de rotation est irrationnel, et qui n'est pas conjugué à une rotation.

12.1.1. *Dynamique d'un contre-exemple de Denjoy.* Soit f un homéomorphisme du cercle et $\alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$ son nombre de rotation.

Lemme 12.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (1) f possède une orbite qui est dense dans S^1
- (2) toutes les orbites de f sont denses dans S^1
- (3) f est conjugué à la rotation R_α par un homéomorphisme préservant l'orientation.

Démonstration : Il suffit de voir que, si l'orbite de x est dense, alors l'application $H_{x,0}$ est injective. \square

Théorème 19. *Si f est un contre-exemple de Denjoy alors il existe un ensemble de Cantor $\mathcal{C} \subset S^1$, invariant par f , et pour tout $x \in S^1$ $\omega(x) = \alpha(x) = \mathcal{C}$. En particulier, f est minimal sur \mathcal{C} .*

Démonstration : On sait que f n'a aucune orbite dense. Soit x un point et \mathcal{C} son ω -limite. Donc \mathcal{C} est invariant par f . Le complémentaire de \mathcal{C} est une union d'intervalles I_i . Soit y un point de S^1 . Supposons que $\omega(y)$ contienne un point z hors de \mathcal{C} , et donc $\exists i, z \in I_i$. On en déduit qu'il existe $n < m$ tel que $f^n(y) \in I_i$ et $f^m(y) \in I_i$. ceci implique $f^{m-n}(I_i) \cap I_i \neq \emptyset$. Comme f laisse invariant $S^1 \setminus \mathcal{C}$, l'image d'un I_j est exactement un I_k , et donc $f^{m-n}(I_i) = I_i$ ce qui implique que les extrémités de I_i sont fixes pour f^{m-n} c'est à dire périodiques. Ceci contredit le fait que le nombre de rotation de f est irrationnel. On a donc montré $\forall x, y, \omega(y) \subset \omega(x)$ et comme les rôles de x et y sont symétriques $\omega(x) = \omega(y) = \mathcal{C}$. On en déduit que toute orbite de \mathcal{C} est dense dans \mathcal{C} : f est minimal sur \mathcal{C} .

De la même façon il existe \mathcal{C}^- qui est l' α -limite de tout point de S^1 . Comme \mathcal{C} est compact et invariant, il contient l' α -limite de ses points ce qui implique $\mathcal{C}^- \subset \mathcal{C}$ et finalement $\mathcal{C}^- = \mathcal{C}$ en renversant les rôles.

Il reste à montrer que \mathcal{C} est un Cantor: il n'a pas de point isolé car, pour tout $x \in \mathcal{C}$, $x \in \omega(x)$ mais n'est pas périodique, donc il existe une suite de point $f^i(x)$ convergeant vers x et différent de x . C'est un compact de S^1 . Finalement il est d'intérieur vide: si I est un intervalle ouvert inclus dans \mathcal{C} alors tout x de $S^1 \setminus \mathcal{C}$ possède un itéré dans I , ce qui contredit l'invariance de \mathcal{C} .

Tout compact d'intérieur vide et sans point isolé de S^1 est un ensemble de Cantor. \square

12.1.2. *Construction d'un contre exemple.*

Théorème 20. *Pour tout $\alpha \in S^1$, il existe un difféomorphisme f_α de classe C^1 , de nombre de rotation α et qui n'est pas conjugué à la rotation R_α .*

12.1.3. *Théorème de Denjoy.*

Théorème 21. *Si f est un C^2 difféomorphisme du cercle de nombre de rotation irrationnel, alors f est conjugué à une rotation.*

La preuve du théorème est aussi intéressante que son énoncé, et introduit l'une des idées maîtresses des systèmes dynamiques de classe C^2 ; le contrôle de la distorsion.

Définition 12.1. *Soit f une application de classe C^1 de S^1 dans \mathbb{R} et soit I un intervalle de S^1 . On appelle distorsion de f sur I le nombre*

$$Dist(f, I) = \max\{\log\left(\frac{f'(x)}{f'(y)}\right), x, y \in I\} \geq 0$$

La distorsion est nulle si l'application est affine.

Soit $f: S^1 \rightarrow S^1$ un difféomorphisme de classe C^2 . Je noterai $C(f) = \max_{x \in S^1} \frac{|f''(x)|}{f'(x)} > 0$, en remarquant que $\frac{f''(x)}{f'(x)}$ est la dérivée de $\log \circ f'$.

Lemme 12.2. *Supposons que $f: S^1 \rightarrow S^1$ soit de classe C^2 . Soit I un intervalle de S^1 et soit $n > 0$. On considère $\ell_n = \ell(f^n(I))$ et $L_n = \sum_0^{n-1} f^i(I)$. Alors*

$$Dist(f^n, I) \leq C(f) \cdot L_n.$$

Démonstration : On écrit $(f^n)'(x) = \prod_0^{n-1} f'(f^i(x))$.

Donc

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)}\right) &= \sum_0^{n-1} \log(f'(f^i(x))) - \sum_0^{n-1} \log(f'(f^i(y))) \\ &= \sum_0^{n-1} (\log(f'(f^i(x))) - \log(f'(f^i(y)))) \\ &\leq \sum_0^{n-1} C(f) \cdot l_i \\ &= C(f) \cdot L_n \end{aligned}$$

\square

Lemme 12.3. *Pour tout L il existe η tel que pour tout $I = [a, b]$ et tout n tel que $L_n(I) \leq L$, on ait la propriété suivante : soit $J = [a - \eta(b - a), b + \eta(b - a)]$, alors $L_n(J) \leq 3L$.*

Démonstration : On va montrer $L_i[a - \eta(b - a), a] \leq L_i(I)$ pour η bien choisi. Supposons qu'on l'ait montré pour $i - 1$, on veut le montrer pour i . Cependant Le contrôle de distorsion nous dit que

$$\text{Dist}(f^i, [a - \eta(b - a), a]) \leq C(f)L.$$

Remarquons

$$\begin{aligned} \frac{\ell(f^i([a - \eta(b - a), a]))}{\ell(f^i(I))} &\leq \sup\left\{\frac{D(f^i)(x)}{D(f^i)(y)}, x, y \in [a - \eta(b - a), b]\right\} \frac{\ell[a - \eta(b - a), a]}{\ell(I)} \\ &\leq e^{\text{Dist}(f^i, [a - \eta(b - a), b])\eta} \\ &\leq e^{C(f) \cdot L \eta} \end{aligned}$$

par l'hypothèse de récurrence.

On en déduit que

$$\ell(f^i([a - \eta(b - a), a]) \leq e^{C(f) \cdot L} \cdot \eta \cdot \ell(f^i(I)).$$

Il suffit d'avoir choisi $\eta < e^{-C(f) \cdot 2L}$ et l'on a $\ell(f^i[a - \eta(b - a), a]) \leq \ell(f^i(I))$ ce qui permet de voir $L_i[a - \eta(b - a), a] \leq L_i(I)$. \square

Nous pouvons à présent montrer le théorème de Denjoy:

Démonstration : Soit \mathcal{C} le "minimal exceptionnel de f , c'est à dire l'ensemble de Cantor invariant sur lequel la dynamique est minimal et que est l'omega-limite de tout point du cercle.

On considère une composante connexe I de $S^1 \setminus \mathcal{C}$ de longueur maximale; ceci est possible parce que la somme de toutes les longueurs de ces composantes est majorée par la longueur totale du cercle. Pour tout J il existe donc un nombre fini de ces composante qui soient de longueur supérieur à $\ell(J)$, ce qui permet de choisir l'un des plus grand.

D'autre part, tous les itérés de I sont disjoints. Comme précédemment, ceci implique:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \ell(f^i(I)) \leq \ell(S^1)$$

D'après le lemme, il existe un intervalle J contenant I dans son intérieur et tel que

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \ell(f^i(J)) \leq 3\ell(S^1)$$

et donc la distorsion de f^i pour i arbitraire est (uniformément) majorée par $3C(f) \cdot \ell(S^1)$ sur cet intervalle.

Cependant, les extrémités de I sont dans l'intérieur de J , et appartiennent à \mathcal{C} , par définition. Ces points sont donc récurrents:

Lemme 12.4. *Il existe une infinité de $n > 0$ tel que $f^{-n}(I) \subset J$.*

Pout n assez grand la longueur de $f^{-n}(I)$ tend vers 0, donc il existe des points de $f^{-n}(I)$ où la dérivée est arbitrairement grande (plus que $e^{10C(f)\ell(S^1)}$, par exemple. Cependant $\ell(f^n(I)) \leq \ell(I)$, par choix de I et contient donc au moins un point de dérivée inférieure à 1. Ces deux points sont dans J ce qui contredit le contrôle de la distorsion. \square

Christian Bonatti bonatti@u-bourgogne.fr

Université de Bourgogne,

Institut de Mathématiques de Bourgogne, UMR 5584 du CNRS, BP 47 870,

21078, Dijon Cedex, France.